Université Paris Dauphine 2013
MI2E **CC n° 1**

Contrôle Continu - Algèbre 2 - DU1

Une attention particulière doit être apportée à la lisibilité de la copie, à la rédaction des réponses afin d'obtenir la totalité des points. Sauf mention du contraire, il faut justifier vos réponses.

Question de cours 1 : (1 point) Donner la définition de $k > 2$ sous-espaces vectoriels (d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E) en somme directe.

Question de cours 2 : (2 points) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}-$espace vectoriel ? Et en tant que $\mathbb{R}-$espace vectoriel ? Donner une base dans chaque cas.

Question de cours 3 : (4 points) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Exprimer $\dim(F + G)$ en fonction de $\dim(F \cap G)$, $\dim(F)$ et $\dim(G)$ et démontrer l'égalité proposée.

Exercice 1 (2 points) Parmi les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont des familles libres : *(répondre par oui (libre) ou par non (liée) et ne pas justifier ses réponses. Attention à la notation : -1 pour une mauvaise réponse).*

1. $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, -2, -1)$.
2. $(1, 2, 3)$, $(0, 0, 0)$.
3. $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$.
4. $(1, 2, 3)$, $(0, 5, 6)$, $(7, 8, 0)$, $(1, 1, 1)$.

Exercice 2 (3 points) Soient $F_1, \dots, F_n$ $n \geqslant 2$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Montrer que $\cup_{i=1}^{n} F_i = E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il existe un indice $i_0 \in [1, n]$ tel que $F_j \subset F_{i_0}$ quelque soit $j = 1, \dots, n$. On montrera d'abord la propriété pour $n = 2$ et on pourra utiliser une preuve par récurrence.

Exercice 3 (3 points) Soit E le sous espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$(1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4) \text{ et } (3, 8, -3, -5)\,.$$

1. La famille est elle libre ? Génératrice ?
2. Trouvez une base de E dont les éléments seront choisis parmi les vecteurs donnés précédemment. On la note B.
3. Le vecteur $(13, 16, 11, -27)$ appartient-il à cet espace ?
4. Compléter la base B en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 (2 points) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On suppose que $F \oplus G = E$. On considère $(g_1, \dots, g_k)$ une base de G et $x_1, \dots, x_k \in F$. Montrer que $\mathrm{Vect}(g_1 + x_1, \dots, g_k + x_k)$ est un supplémentaire de F.

Exercice 5 (3 points) On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1, 0)$,$v_2 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 2, 3, 4)$ et le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 2y = 0\}$.

1. Déterminer les dimensions respectives de H et de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
2. Exhiber une base de $F \cap G$.