Algèbre Linéaire 2 Feuille de TD n°3

Ce document contient des indications qui peuvent être utiles pour la résolution de certains exercices de la troisième feuille de TD. Dans la plupart des exercices je ne donne pas la solution complète mais seulement des idées qui peuvent vous aider à les résoudre.

Exercice 9

Soient E, F, G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. A-t-on $(E \cap F) + (E \cap G) = E \cap (F + G)$? Non.
Soit, par exemple, $n = 2$; soient $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $E = \text{vect}(\{(1, 1)\})$, $F = \text{vect}(\{e_1\})$ et $G = \text{vect}(\{e_2\})$. On remarque que $E \cap F = \{0\}$, $E \cap G = \{0\}$ et $E \cap (F + G) = E \cap \mathbb{R}^2 = E \neq \{0\} = (E \cap F) + (E \cap G)$.

Soient E, F, G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. A-t-on $E + (F \cap G) = (E + F) \cap (E + G)$? Non.
Soit, par exemple, $n = 2$; soient $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $E = \text{vect}(\{(1, 1)\})$, $F = \text{vect}(\{e_1\})$ et $G = \text{vect}(\{e_2\})$. On remarque que $E+(F\cap G) = E+\{0\} = E$ et $(E + F) \cap (E + G) = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ donc $E + (F \cap G) = E \neq \mathbb{R}^2 = (E + F) \cap (E + G)$.

Exercice 10

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que, si $A^2 = A$ alors $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, x s'écrit sous la forme $x = x - Ax + Ax$ avec $x - Ax \in \ker A$ et $Ax \in \operatorname{Im} A$. Donc $\mathbb{R}^n = \ker A + ImA$. Pour conclure il reste à montrer seulement que $\ker A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$ (voir l'exercice 14 de la deuxième feuille de TD).

Montrer que, si $A^2 = Id$ alors $\mathbb{R}^n = \ker(A + Id) \oplus \ker(A - Id)$. Que peut-on dire sur le rang de A ?

Suggestion : $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = \frac{x-Ax}{2} + \frac{x+Ax}{2}$ ...
En ce qui concerne le rang, $n = \text{rg}(Id) = \text{rg}(A^2) \leq \text{rg}\, A \leq n$, donc $\text{rg}(A) = n$.

Exercice 11

Dans le plan on considère l'application définie géométriquement comme la symétrie autour de la droite d'équation $x_1 + x_2 = 0$ et parallèlement à la droite d'équation $x_1 - x_2 = 0$. Montrer que cette application géométrique peut être écrite comme la multiplication par une matrice que l'on déterminera.

Étapes à suivre

1. On repère les vecteurs dont on connaît les images (il faut connaître les images des vecteurs qui forment une base de l'espace dans le quel on travaille pour passer au point 2.).
2. On décompose un vecteur quelconque en une somme des vecteurs précédents.
3. On calcule les coordonnées de l'image (en utilisant la linéarité).
4. On écrit la matrice.

Dans notre exercice

On remarque d'abord que la symétrie, qu'on appelle S, autour de la droite D d'équation $x_1 + x_2 = 0$ et parallèlement à la droite U d'équation $x_1 - x_2 = 0$ est telle que la droite D est un droite de points invariants. De plus la droite XX' qui relie un point $X = (x_1, x_2)$ à son image $X' = S(X)$ est parallèle à la droite U.

1. On repère les vecteurs dont on connaît les images.
   On considère $(1, -1) \in D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 = 0\}$ et on observe que $S((1, -1)) = (1, -1)$.
   Ensuite, on prend $(1, 1) \in U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 - x_2 = 0\}$ et on trouve que $S((1, 1)) = (-1, -1)$.

2. On décompose un vecteur quelconque en une somme des vecteurs précédents.
   La famille $\{(1, -1), (1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et
   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. On calcule les coordonnées de l'image (en utilisant la linéarité).

$$\begin{aligned} S\left(\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right)\right) &= \frac{x_1-x_2}{2} S\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right)\right) + \frac{x_1+x_2}{2} S\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)\right) = \\ &= \frac{x_1-x_2}{2}\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right) + \frac{x_1+x_2}{2}\left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array}\right) = \\ &= x_1\left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array}\right) + x_2\left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

4. On écrit la matrice.
   La matrice associée à l'application S est

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array}\right).$$

Exercice 12

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère l'application définie géométriquement comme la projection sur le plan d'équation $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ et parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Montrer que cette transformation peut être écrite comme la multiplication par une matrice que l'on déterminera.

Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$, $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$ et S la projection sur le plan P parallèlement à la droite D. $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $S(X) = X'$ avec X' tel que la droite (XX') est parallèle à D et $X' \in P$.
On utilise la méthode introduite dans l'exercice précédent.
Suggestion : Chercher les images de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
$S((1, 0, 0)) = (x_1, x_2, x_3)$ où $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $(x_1, x_2, x_3) \in P$ et $(x_1 - 1, x_2, x_3)$ (qui représente la direction de la droite (XX')) est colinéaire avec $(1, 1, 1)$; donc il faut déterminer k tq

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 1 = k \\ x_2 = k \\ x_3 = k \end{array}\right.$$

et $(k+1)+k+2k = 0$ (équation du plan). Finalement $k = -\frac{1}{4}$ et $S((1, 0, 0)) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.
. . .

Exercice 13

Suffit-il que $E \cap F = E \cap G = F \cap G = \{0\}$ pour que E, F et G soient en somme directe ? Non.
Soit, par exemple, $n = 2$; soient $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $E = \text{vect}(\{(1, 1)\})$, $F = \text{vect}(\{e_1\})$ et $G = \text{vect}(\{e_2\})$. $E \cap F = E \cap G = F \cap G = \{0\}$, $E \cap G = \{0\}$ mais le trois sous-espaces ne sont pas en somme directe parce que l'élément $(0, 0)$ ne se décompose pas de manière unique comme $e + f + g$ avec $e \in E$, $f \in F$, $g \in G$.