Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$; $E'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.
$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$; $E'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.
$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geqslant 0\}$; $E'_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels :

1. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$,
2. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$.

Exercice 3 Etudier la liberté des familles

1. $(1, 1), (-2, -2)$.
2. $(2, 3), (6, -9)$.
3. $(1, 3, 1), (1, 3, 0), (0, 2, 1)$.
4. $(1, 3), (1, 2), (1, 1)$.

Exercice 4 Montrer que $\{f : x \mapsto e^{ax}; a \in \mathbb{R}\}$ est une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle génóratrice dans cet espace vectoriel ?

Exercice 5 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $(1, 1), (3, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $(1, 0, 2), (1, 2, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u = (-1, 0, 1)$ et $v = (1, 4, 0)$. A quelle condition sur le réel m, le sous-espace vectoriel engendré par $w = (m, 2m, m + 1)$ est-il contenu dans $\mathrm{Vect}(u, v)$?

Exercice 7 Existe-t-il des réels x, y tels que que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par e_1 et e_2 où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel réel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. A quelle condition sur F_1, F_2, $F_1 \cup F_2$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 1, 2), \mathbf{e}_3 = (1, 2, 3) .$$

1. Montrer que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5, 7, 12)$ dans cette base.

Exercice 10 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1, 1, 0)$, $\vec{v_2}(4, 1, 4)$ et $\vec{v_3}(2, -1, 4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 11 Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1, 0, 1)$, $\vec{v_2} = (0, 2, 2)$ et $\vec{v_3} = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$ et $\vec{v_3} = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1} = (1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{v_3} = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $\vec{v_4} = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1} = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $\vec{v_2} = (1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $\vec{v_3} = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1} = (2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $\vec{v_2} = (-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ et $\vec{v_3} = (1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Exercice 13 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1, 1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 4, 2)$, $V_4 = (10, 4, 13, 7)$, $V_5 = (1, 7, 8, 14)$. Sélectionner parmi ceux-ci une famille de vecteurs qui forme une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces cinq vecteurs.

Exercice 14 Soit A une matrice $n \times n$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est libre dans $\mathbb{R}^n$, il en est de même de $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_p$.
2. Si $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_p$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_p$.
4. Si $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_p$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

Exercice 15 Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$.

Exercice 16 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e_2}(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

Exercice 17 On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

Exercice 18 On suppose que $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 19 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} \\ G &= \mathrm{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} \end{aligned}$$

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ son graphe, qui est l'ensemble des points (x_1, x_2) tels que $x_2 = f(x_1)$. Pour quelles fonctions f l'ensemble Γ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?