Université Paris Dauphine 2013
MI2E **feuille n° 2**

Algèbre 2- DU1

Exercice 1 1. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1, 1, 1)$.

2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Exercice 2 Vrai ou faux ? On désigne par E un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Exercice 3 Soient $\vec{v_1} = (1, 2, 3, 4), \vec{v_2} = (2, 2, 2, 6), \vec{v_3} = (0, 2, 4, 4), \vec{v_4} = (1, 0, -1, 2), \vec{v_5} = (2, 3, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = Vect\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ et $G = Vect\{\vec{v_4}, \vec{v_5}\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F + G$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

1. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
2. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$.
3. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (1, 0, -2, 3)$, $v_4 = (2, 1, 0, -1)$, $v_5 = (4, 3, 2, 1)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (3, 4, 5, 16)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (2, 1, 0, 11)$, $v_4 = (3, 4, 5, 14)$.
Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent, autrement dit le rang de la famille de vecteurs donnée.

Exercice 6 Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Vérifier que E est un espace vectoriel réel et en exhiber une base.
A quelle condition l'ensemble des fonctions C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = a(x)f + b$ où $a(x)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ forme-t-il un espace vectoriel ? En donner alors une base.

Exercice 7 Soit $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux. Montrer que la famille suivante

$$P_0(X) = (X+1)^2\,, P_1(X) = (X-1)^2 \text{ et } P_2(X) = 3\,, \tag{1}$$

est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer les coordonnées dans la base précédente d'un polynôme quelconque

$$P(X) = aX^2 + bX + c \tag{2}$$

pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 8 Soit E l'ensemble des applications C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit :

$$f : x \mapsto \begin{cases} ax^2 + b \text{ si } x \in]-\infty, 0]\,, \\ cx^2 \text{ si } x > 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que E n'est pas de dimension finie,
2. Exhiber une base de F,
3. Exhiber une base de $F \cap E$.

Exercice 9 Soient E, F, G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$(E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F + G).$$

A-t-on

$$(E \cap F) + (E \cap G) = E \cap (F + G)?$$

Montrer que

$$E + (F \cap G) \subset (E + F) \cap (E + G).$$

A-t-on

$$E + (F \cap G) = (E + F) \cap (E + G)?$$

Exercice 10 Soient E, F, G des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. $F \cap G = \{0\} = E \cap (F + G)$.
2. $E \cap F = \{0\} = (E + F) \cap G$.
3. La réunion de bases de E, F et G est une famille libre.
4. Tout vecteur $x \in E + F + G$ se décompose de manière unique comme $x = e + f + g$, avec $e \in E, f \in F, g \in G$.

On rappelle que E, F et G sont en somme directe, ce qui est noté $E \oplus F \oplus G$.
Suffit-il que $E \cap F = E \cap G = F \cap G = \{0\}$ pour que E, F et G soient en somme directe ?

Exercice 11 Dans $\mathbb{R}^n$, considérons l'ensemble des solutions H de l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

Montrer que H est de dimension $n - 1$ sauf si tous les coefficients a_i sont nuls. (On dit que H est un *hyperplan*).

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E qui est supplémentaire à la fois de E_1 et de E_2.