Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
- L'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 1)$.
- Lapplication $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, a, axy)$ où a est un paramètre réel. On demande de discuter suivant les différentes valeurs de a.

Exercice 2 Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ dont l'expression en coordonnées est donnée par :

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y, z)) . \tag{1}$$

A quelle condition sur f_1 et f_2 l'application f est-elle linéaire ?

Exercice 3 Soit $F = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions lisses du segment $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
- Montrer que les applications $\mathcal{I} : F \mapsto F$ et $\mathcal{D} : F \mapsto F$ définies par

$$\mathcal{I}(f)(x) = \int_0^x f(u)\,du$$
$$\mathcal{D}(f)(x) = f'(x)$$

  sont linéaires.
- La famille $\{\mathcal{I}, \mathcal{D}\}$ est-elle libre ?
- Déterminer $\ker(\mathcal{I} + \mathcal{D})$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que l'application $\delta : E \mapsto E$ définie par

$$\delta(P)(X) = P(X - 2) - P(X) \tag{2}$$

est linéaire et déterminer son image et son noyau.

Exercice 5 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$ deux applications linéaires. Montrer que $g \circ f = 0_{L(E,G)}$ équivaut à $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Exercice 6 Soit $f \in L(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie n. Vérifier que $\{g \in L(E) \,|\, g \circ f = f \circ g = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. En déterminer sa dimension.

Exercice 7 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$ deux applications linéaires.
- Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.
- Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.
- A quelle condition sur f a-t-on l'égalité $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
- A quelle condition sur g a-t-on l'égalité $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 8 Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $g, h \in L(E, F)$ deux applications linéaires.
- A quelle condition sur f et g existe-t-il $f \in L(F, F)$ tel que $f \circ g = f \circ h$?
- A quelle condition sur f et g existe-t-il $e \in L(E, E)$ tel que $g \circ e = h \circ e$?
- A quelle condition sur f et g existent-ils $e \in L(E, E)$ et $f \in L(F, F)$ tels que $f \circ g \circ e = f \circ h \circ e$?

Exercice 9 Soit $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifiant $f(1, 1, 1) = 3$, $f(1, 0, 2) = 0$, $f(1, 0, 0) = 2$. Déterminer $f(x, y, z)$ en fonction de x, y, z.

Exercice 10 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $f_1, \ldots, f_k \in E^* = L(E, \mathbb{K})$.
- Montrer que $\dim E^* = n$.
- Montrer que $\dim \cap_{i=1}^k \ker f_i = n - k$ est équivalent au fait que famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est libre (dans E^*).

Relier cette question à la résolution d'un système linéaire. Montrer par exemple que $e_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $e_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} e_1(x, y) &= x + y \\ e_2(x, y) &= x - 2y \end{aligned}$$

forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

Exercice 11 Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On suppose $f^3(E) = f(E)$. Montrer alors que $E = f(E) \oplus \ker f$.

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
- Quelle est la dimension de $L(E, E)$. En donner une base "naturelle" utilisant une base $(e_i)_{i \in [1,n]}$. Plus géneralement, quelle est la dimension de $L(E, F)$ avec F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie ?
- En déduire que la famille $\{Id, f, \ldots, f^{n^2}\}$ est liée et donc qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.

Exercice 13 Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ et $g \in L(E)$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\} \\ \ker(f) + \ker(g) = E\,. \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 14 Trouver tous les endomorphismes de E espace vectoriel de dimension finie tel que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Déterminer $\{f \in L(E) \,|\, f \circ g = g \circ f \text{ pour tout } g \in L(E)\}$

Exercice 16 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Montrer que tout endomorphisme de E est la somme de deux endomorphismes inversibles de E.

Exercice 17 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n et $f \in L(E)$. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On suppose maintenant que pour tout $x \in E$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n(x)}(x) = 0$. Montrer que $f^n(x) = 0$ quelque soit $x \in E$.