Université Paris Dauphine 2013
MI2E **feuille n° 3**

Algèbre 2- DU1

Exercice 1 On considère sur $\mathbb{C}_n[X]$ l'endomorphisme f défini par $P \mapsto (X^2-1)P''$. Écrire la matrice de f dans la base $(X^i)_{i=0,\dots,n}$.

Exercice 2 On considère la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice Q définie par $Q = \frac{1}{4}(Id + P)$. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P. Calculer $(4I-P)Q$ et $Q(4I-P)$ et en déduire que Q est inversible.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 4 On considère la matrice P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice Q définie par $Q = \frac{1}{4}(Id + P)$. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P. Calculer $(4I-P)Q$ et $Q(4I-P)$ et en déduire que Q est inversible.

Exercice 5 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^n = 0$ et x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On a déjà montré dans un TD précédent que $B = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_B(u)$ de u dans cette base. Calculer les matrices des puissances de u dans cette base : $\mathrm{Mat}_B(u)^k$ pour $k \in [1,5]$ (on suppose $n=5$ dans cette question seulement).

Exercice 6 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Exercice 7 Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que

$$(kerA) \cap (imA) = A(kerA^2).$$

Exercice 8 Soit $n \geqslant 1$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de dimension n à coefficients réels et on note $(E_{i,j})_{i,j\in[1,n]}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$: $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls et sauf le coefficient à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1.
On définit pour $i \neq j$ la matrice $T_{i,j}(\alpha)$ par $T_{i,j}(\alpha) = Id + \alpha E_{i,j}$, $D_i(\lambda) = Id + (\lambda - 1)E_{i,i}$ pour $\lambda \neq 0$ (tous les coefficients diagonaux valent 1 sauf en position i et celui-ci vaut λ).
Enfin, on définit la matrice de permutation $P_{i,j}$ comme la matrice $p_{k,l}$ est définie par $p_{i,j} = p_{j,i} = 1$ et $p_{k,k} = 1$ pour $k \notin \{i,j\}$ et $p_{k,l} = 0$ sinon. On notera A une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{R})$

1. Exprimer comme opération sur les lignes et les colonnes la multiplication à droite et à gauche de la matrice A par les matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.
2. En déduire que les matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$ sont inversibles et expliciter leur inverses.
3. Montrer que pour $n = 1$ et $n = 2$, une matrice inversible peut sécrire comme un produit de matrices $T_{i,j}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.
4. Généraliser le résultat précédent à n quelconque en utilisant par exemple une preuve par récurrence.
5. Pourquoi une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls est-elle inversible ?
6. On note Trig_+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Montrer que Trig_+ est un espace vectoriel stable par multiplication. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
7. Soit $A \in \mathrm{Trig}_+$ une matrice inversible. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathrm{Trig}_+ &\mapsto \mathrm{Trig}_+ \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$
est injective. En déduire que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure.
8. Montrer que, si une matrice A est inversible, on peut trouver un couple de matrices $B, C \in \mathrm{Trig}_+$ et une matrice de permutation P telles que $A = PC^TB$ où C^T désigne la transposée de la matrice $C = [c_{i,j}]_{i,j\in[1,n]}$ définie par $C^T = [c_{j,i}]_{i,j\in[1,n]}$.

Exercice 9 Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de α, a, b et c :
$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

Exercice 10 Soient $E = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $V = (v_1, v_2, v_3)$ une autre base définie par :
$$\begin{aligned} v_1 &= 2e_1 - 4e_2 + e_3 \\ v_2 &= -e_1 \\ v_3 &= e_2 - 2e_1\,. \end{aligned}$$
On considère un endomorphisme u défini par sa matrice dans la base E :
$$\mathrm{Mat}_E(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_V(u)$ de u dans la base V.

Exercice 11 Soient A et B deux matrices $n \times n$ telles que $AB = BA$. Montrer que

$$B(kerA) \subset kerA$$

et que

$$B(imA) \subset imA.$$

Exercice 12 Soient I la matrice identité de $\mathbb{R}^3$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $J^2 - J - 2I = 0$. En déduire que J est inversible et calculer son inverse.

Exercice 13 Trouver une matrice B telle que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 Soit u l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $A \mapsto A^t$ où $A^t := (a_{j,i})_{i,j \in [1,n]}$ pour une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$. Montrer que $\frac{Id_{M_n(\mathbb{R})} - u}{2}$ est un projecteur et déterminer son rang.

Exercice 15 Soit A une matrice 2×2 telle que $A^2 = -I$. On cherche à trouver une base dans laquelle l'expression de A est simple. Considerons pour ceci un vecteur e non nul dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que (e, Ae) est une base, et écrire A dans cette base. Donner une interprétation géométrique de la matrice A.

Exercice 16 Montrer que les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont semblables. Sont elles semblables à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$? À $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Exercice 17 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$, ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & b & 5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique et

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

dans une autre base ? Même question avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 Soit A une matrice 2×2 telle que $A^2 = 0$. Montrer que, ou bien $A = 0$, ou bien A est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Indication : on peut considérer un vecteur e tel que Ae est non nul, et utiliser la base (e, Ae).

Exercice 19 Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$.

1. Que peut-on dire sur le rang r de A ?
2. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ dont les r premiers vecteurs constituent une base de imA. Montrer que la représentation de A dans cette base est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Exercice 20 Soit A une matrice 3×3 telle que $A^3 = 0$.
– Montrer que le rang r de A est 0, 1 ou 2.
– Montrer que, si $r = 1$, alors A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

– Dans le cas $r = 2$, montrer que A^2 est non nulle. En considérant un vecteur e tel que $A^2(e)$ est non nul, montrer que $(e, A(e), A^2(e))$ est une base, et conclure que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 21 Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.

2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 22 Soit σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$. On considère l'application linéaire f_σ définie sur la base canonique de $\mathbb{K}^n$ par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Écrire la matrice de f_σ dans la base canonique. En étudiant le sous-espace vectoriel engendré par les itérés de $(f_\sigma^j(e_1))$ pour $j \geqslant 0$, montrer qu'il existe $k \leqslant n$ tel que $f^k = id$. Montrer alors qu'il existe p entiers non nuls $k_1, \dots, k_p$ tels que $\prod_{i=1}^p (f_i^k - id) = 0$ et $\sum_{i=1}^p k_i = n$.