Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 3 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & . & . & . & n \\ n & 2 & n & . & . & n \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ n & . & . & . & . & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & a_n \\ -x & x & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -x & x & 0 & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & -x & x \end{vmatrix}$$

Exercice 4 On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de D_2 à un déterminant $n \times n$ du même type.

Exercice 5 Montrer qu'il existe une matrice A de taille $n \times n$ à coefficients réels telle que $A^2 = -Id$ si et seulement si n est pair.
Existe-t-il une matrice carrée A à coefficients réels telle que ${}^tA \cdot A = -Id$? (on pourra par exemple considérer le coefficient en haut à gauche).

Exercice 6 Soient A et B de matrices $n \times n$. Montrer que la fonction $x \mapsto det(A + xB)$ est un polynome de degré au plus n. A quelle condition est-il de degré n ?

Exercice 7 Quel est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 1, 1); e_2 = (2, 1, 3); e_3 = (1, 2, 2)$.
Considérons maintenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quel est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs Ae_1, Ae_2, Ae_3.

Exercice 8 En utilisant la multilinéarité, montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_2 - b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

est nul.

Exercice 9

1. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$ et $B \in M_q(\mathbb{R})$. Calculer (en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$) le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra pour cela décomposer M comme produit de deux matrices de déterminant évident et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_q(\mathbb{R})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra généraliser la méthode de 1.)

Exercice 10 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes C_i sont donnés par $C_i = e_i + e_n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $C_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. Calculer alors son déterminant. On commencera par étudier les cas $n = 3$, $n = 4$, avant de traiter le cas général.

Exercice 11 Étant donnés des paramètres a, b, c, résoudre l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$