TD Algèbre Linéaire 2 Exercice 20

Mlle Simona ROTA NODARI

Montrer que la forme échelonnée réduite à la quelle on peut réduire une matrice par opérations sur le lignes ne dépend pas du choix de ces opérations. On pourra procéder par récurrence sur le nombre de colonnes.

Définition 1. *Les opérations élémentaire sur les lignes sont les opérations suivantes :*
- *changer l'ordre des lignes ;*
- *multiplier une ligne par un scalaire non nul ;*
- *ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.*

Définition 2. *Une matrice est dite sous forme échelonné (ou forme échelonnée par rapport aux lignes), si elle remplit les trois conditions suivantes :*
1. *toutes ses lignes non nulles sont situées au-dessus de ses lignes nulles ;*
2. *chaque élément de tête d'une ligne se trouve dans une colonne à droite de l'élément de tête de la ligne précédente ;*
3. *tous les éléments de la colonne sous un élément de tête sont nuls.*

On appelle élément de tête d'une ligne l'élément non nul le plus à gauche.

Avec la méthode de Gauss qui utilise les opérations élémentaires définies précédemment, on peut toujours écrire une matrice sous forme échelonnée mais, en général, cette forme n'est pas unique. On utilise donc la méthode de réduction de Gauss-Jordan qui permet d'écrire une matrice sous forme échelonnée réduite.

Définition 3. *On parle de forme échelonnée réduite (ou forme échelonnée réduite par rapport aux lignes) lorsqu'une matrice sous forme échelonnée satisfait aux conditions supplémentaires suivantes :*
1. *l'élément de tête de chaque ligne non nulle vaut* 1 *;*
2. *chaque* 1 *de tête d'une ligne est le seul élément non nul de sa colonne.*

Une position pivot dans une matrice A *est celle qu'occupe un* 1 *de tête dans la forme échelonnée réduite de* A*. Une colonne de* A *qui contient une position pivot est appelée une colonne pivot.*

Théorème 1 (Unicité de la forme échelonnée réduite)**.** *Une matrice est équivalente à une et une seule matrice échelonnée réduite.*

Avant de démontrer le théorème on introduit des lemmes qui seront très utiles dans la preuve du théorème.

Lemme 1. *Toute combinaison linéaire de combinaisons linéaires est une combinaison linéaire.*

Dans la suite on va utiliser la notation suivante ; soient A et B deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donc a_i, b_j sont des vecteurs qui représentent les lignes de A et B respectivement.

Corollaire 1.1. *Si une matrice B est obtenue de A par opération élémentaires sur les lignes, alors chaque ligne de B est une combinaison linéaire des lignes de A.*

Démonstration. On utilise un raisonnement par récurrence sur le nombre d'opérations nécessaires pour passer de la matrice A à la matrice B.

1. Initialisation de la récurrence $n = 0$
   Si B peut s'écrire à partir de A avec 0 opérations, alors $A = B$ et $b_i = 0a_1 + \cdots + 1a_i + \cdots + 0a_m$.
2. Hypothèse de récurrence : supposons que si B est obtenue de A avec n opération élémentaires sur les lignes, alors chaque ligne de B est une combinaison linéaire des lignes de A.
   Soit B une matrice obtenue de A avec $n + 1$ opération élémentaires sur les lignes ; puisque $n + 1 > 0$ il existe une matrice G telle que $A \to \ldots \to G \to B$. G est obtenue de A avec n opération élémentaires sur les lignes, donc chaque ligne de G est une combinaison linéaire des lignes de A. Pour la dernière opération on a trois possibilités :
   (a) Changer l'ordre des lignes.
   Les lignes de B sont les lignes de G réarrangées, donc chaque ligne de B est une combinaison linéaire des lignes de A.
   (b) Multiplier une ligne par un scalaire non nul ou ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Les lignes de B sont des combinaisons linéaires des lignes de G, donc, grâce au lemme 1, chaque ligne de B est une combinaison linéaire des lignes de A.

$\square$

Lemme 2. *Si deux matrices sous forme échelonnée sont équivalentes (par opérations élémentaires sur les lignes) alors les éléments de tête de la première ligne de deux matrices se trouvent dans la même colonne. De même pour toutes les lignes.*

Démonstration. Soient B et D deux matrices sous forme échelonnée équivalentes (par opérations élémentaires sur les lignes) ; B et D ont la même taille, par exemple $m \times n$. On dénote avec l_p la colonne où se trouve l'élément de tête de la p-ième ligne de la matrice B et avec k_j la colonne où se trouve l'élément de tête de la j-ième ligne de la matrice D ; par conséquent $\beta_{il_p} = 0$ et $\beta_{pj} = 0$ pour tout $i > p$ et pour tout $j < l_p$ (de même pour D).
On montre $l_1 = k_1$, $l_2 = k_2$, $\ldots$ par récurrence.
Il est important de rappeler que, grâce au corollaire 1.1,

$$\begin{aligned} b_i &= s_{i1}d_1 + s_{i2}d_2 + \cdots + s_{im}d_m \\ d_j &= t_{j1}b_1 + t_{j2}b_2 + \cdots + t_{jm}b_m. \end{aligned}$$

1. Initialisation de la récurrence $n = 1$; on montre $l_1 = k_1$.
   Si l'un de deux lignes est une ligne nulle, alors la matrice correspondante est nulle puisque elle est dans une forme échelonnée ; par conséquent l'autre matrice aussi est nulle.
   Sinon on écrit

   $$\begin{aligned} b_1 &= s_{11}d_1 + s_{12}d_2 + \cdots + s_{1m}d_m \\ (0, \ldots, 0, \beta_{1l_1}, \ldots) &= s_{11}(0, \ldots, 0, \delta_{1k_1}, \ldots) + \\ &+ s_{12}(0, \ldots, 0, 0, \ldots) + \cdots + \\ &+ s_{im}(0, \ldots, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

   Dans les colonnes de D à gauche de la colonne k_1 il y a que des zéros (puisque δ_{1k_1} est l'élément de tête de la première ligne), donc si $l_1 < k_1$ on a $\beta_{1l_1} = s_{11}0 + \cdots + s_{1m}0 = 0$; mais β_{1l_1} est l'élément de tête de la première ligne et par définition il est différent de zéro. En conclusion, $l_1 < k_1$ n'est pas possible.
   De la même façon on ne peut pas avoir $k_1 < l_1$. Par conséquent $k_1 = l_1$.
2. Hypothèse de récurrence : supposons que $k_1 = l_1$, $k_2 = l_2$, $\ldots$, $k_r = l_r$.

   $$b_{r+1} = s_{(r+1)1}d_1 + s_{(r+1)2}d_2 + \cdots + s_{(r+1)m}d_m$$

Maintenant, $r+1>1$ implique $0=\beta_{(r+1)l_1}=s_{(r+1)1}\delta_{1l_1}=s_{(r+1)1}\delta_{1k_1}$; mais δ_{1k_1} est l'élément de tête de colonne k_1-ième donc il est différent de zéro. Par conséquent $s_{(r+1)1}=0$.
On procède par récurrence sur le nombre de colonne.

$$0=\beta_{(r+1)l_2}=s_{(r+1)2}\delta_{1l_2}=s_{(r+1)2}\delta_{1k_2}\Rightarrow s_{(r+1)2}=0.$$

Enfin, $s_{(r+1)j}=0$ pour $j=1,\dots,r$ et

$$b_{r+1}=s_{(r+1)r+1}d_{r+1}+s_{(r+1)r+2}d_{r+2}+\cdots+s_{(r+1)m}d_m.$$

Supposons, par l'absurde, $l_{r+1}<k_{r+1}$, alors $\delta_{jl_{r+1}=0}$ pour tout $j\geq r+1$; donc $\beta_{(r+1)l_{r+1}}=s_{(r+1)r+1}0+s_{(r+1)r+2}0+\cdots+s_{(r+1)m}0=0$ mais $\beta_{(r+1)l_{r+1}}$ est l'élément de tête de la $(r+1)$-ième ligne et par définition il est différent de zéro. En conclusion, $l_{r+1}<k_{r+1}$ n'est pas possible.
De la même façon on ne peut pas avoir $k_{r+1}<l_{r+1}$. Par conséquent $k_{r+1}=l_{r+1}$

□

Démonstration de l'unicité de la forme échelonnée réduite. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on peut écrire toute matrice sous forme échelonnée réduite. Supposons qu'une matrice est équivalente deux matrices échelonnées réduites différentes B et D ; évidemment B et D sont équivalentes (par opérations élémentaires sur les lignes).
À partir du lemme 1 et du corollaire 1.1, on peut écrire

$$b_i=c_{i1}d_1+c_{i2}d_2+\cdots+c_{im}d_m,$$

et, grâce au lemme 2, on peut dire que le deux matrices ont les mêmes lignes non nulles ; c'est-à-dire si $b_1,\dots,b_r$ sont les lignes non nulles de B, alors $d_1,\dots,d_r$ sont les lignes non nulles de D. Par conséquent

$$b_i=c_{i1}d_1+c_{i2}d_2+\cdots+c_{ir}d_r, \tag{1}$$

pour $i=1,\dots,r$. De plus, les élément de tête de la j-ième ligne de B et D se trouvent dans la même colonne qu'on dénote l_j ; donc

$$\begin{aligned}(0,\dots,0,\beta_{il_j},\dots) &= c_{i1}(\dots,\delta_{1l_j},\dots)+\\ &+ c_{i2}(\dots,\delta_{2l_j},\dots)+\cdots+\\ &+ c_{ir}(\dots,\delta_{rl_j},\dots)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\beta_{1l_j} &= c_{11}\delta_{1l_j} + \ldots + c_{1j}\delta_{jl_j} + \ldots + c_{1r}\delta_{rl_j} \\
&\vdots \\
\beta_{jl_j} &= c_{j1}\delta_{1l_j} + \ldots + c_{jj}\delta_{jl_j} + \ldots + c_{jr}\delta_{rl_j} \\
&\vdots \\
\beta_{rl_j} &= c_{r1}\delta_{1l_j} + \ldots + c_{rj}\delta_{jl_j} + \ldots + c_{rr}\delta_{rl_j}.
\end{aligned}$$

Étant donné que D est sous forme échelonnée, tout élément de la l_j-ième colonne est égal zéro sauf δ_{jl_j} qui est égal à 1 ; donc $\beta_{il_j} = c_{ij}\delta_{il_j} = c_{ij}$. D'autre part B aussi est sous forme échelonnée réduite, par conséquent tout élément de la l_j-ième colonne est égal zéro sauf β_{jl_j} qui est égal à 1 ; donc $c_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $c_{ii} = 1$ pour $i = 1, \ldots, r$. Grâce à cela et à l'équation (1) on trouve $b_i = d_i$ et $B = D$.

$\square$

Référence : http ://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/