feuille de travaux dirigés

Normes matricielles, rayon spectral et conditionnement

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1 (norme matricielle subordonnée). Soit n un entier strictement positif. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients complexes et on rappelle qu'une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ est une application vérifiant les propriétés suivantes :

- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, et $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$,
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A,\ B \in M_n(\mathbb{C})$,
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall A,\ B \in M_n(\mathbb{C})$.

Pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \dots, \infty$, sur $\mathbb{C}^n$, on définit la norme matricielle subordonnée associée par

$$\|A\|_p = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p},\ \forall A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, montrer les propriétés suivantes :

1. $\|A\|_p \geq \rho(A)$, où $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(A),\ 1 \leq i \leq n\}$ est le rayon spectral de A,
2. $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$,
3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$,
4. $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2$ pour toute matrice unitaire U (c'est-à-dire telle que $UU^* = I_n$),
5. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Exercice 2. Pour tout réel α, on note A_α la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_α ?
2. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ?
3. Calculer $\|A_\alpha\|_1$, $\|A_\alpha\|_2$ et $\|A_\alpha\|_\infty$.

Exercice 3 $\diamond$ (norme de Frobenius). On considère l'application $\|\cdot\|_F$ définie par

$$\|A\|_F = \operatorname{tr}(A^TA)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2},\ \forall A \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que cette application est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$, mais qu'elle n'est subordonnée à aucune norme sur $\mathbb{R}^n$

2. Montrer que, pour toute matrice d'ordre n orthogonale P, on a $\|PA\|_F = \|AP\|_F = \|A\|_F$ et donc $\|P^T AP\|_F = \|A\|_F$,.

Exercice 4 (rayon spectral et série de Neumann). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle.

1. Montrer que $\rho(A) < 1$ si et seulement si A^k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.
2. Montrer que, si $\rho(A) < 1$, alors les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.
3. Montrer que la série de terme général A^k converge (vers $(I_n - A)^{-1}$) si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 5 (conditionnement d'une matrice). Sur $M_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \ldots, \infty$, sur $\mathbb{R}^n$. Le conditionnement d'une matrice inversible A relativement à cette norme est défini par

$$\mathrm{cond}_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

1. Montrer que si A est symétrique et inversible alors

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}{\min_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}.$$

2. Soient A une matrice inversible, $\boldsymbol{b}$, $\delta\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ et $\delta\boldsymbol{x}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } A(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}.$$

Montrer que

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p} \leq \mathrm{cond}_p(A)\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_p}{\|\boldsymbol{b}\|_p}, \text{ pour } p = 1, 2, \ldots, \infty.$$

3. Soient à présent A et δA des matrices, avec A inversible, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ et $\delta\boldsymbol{x}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } (A + \delta A)(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

Montrer que

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}\|_p} \leq \mathrm{cond}_p(A)\frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}, \text{ pour } p = 1, 2, \ldots, \infty.$$

feuille de travaux dirigés

Méthode d'élimination de Gauss

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss, en donnant l'expression de toutes les matrices et seconds membres intermédiaires, le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Répondre à la même question avec :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Donner une formulation matricielle (c'est-à-dire en termes d'un produit de matrices) de la réduction à la forme échelonnée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

Exercice 3. On considère le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Est-il possible d'utiliser la méthode d'élimination de Gauss (sans échange) pour la résolution de ce système linéaire ?
2. Trouver une permutation de A, de la forme PAQ, sur laquelle on peut réaliser l'élimination. Comment transforme-t-elle le système linéaire ?

Exercice 4. Soit la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer son inverse en résolvant le système matriciel $UX = I_4$ dans lequel X désigne une matrice carrée d'ordre 4 par la méthode d'élimination de Gauss–Jordan.

Exercice 5. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss–Jordan, déterminer le système sous forme échelonnée réduite $(\mathcal{U})$ équivalent à $(\mathcal{S})$.
2. Préciser le rang et la dimension du noyau de la matrice échelonnée réduite obtenue et en déduire ceux de la matrice A.
3. Déterminer une base de l'espace image et du noyau de la matrice A.
4. Quelle(s) condition(s) doit vérifier le vecteur b pour que le système $(\mathcal{S})$ ait une solution ?

Exercice 6. Résoudre les systèmes linéaires suivants, après en avoir déterminé la forme échelonnée réduite par la méthode d'élimination de Gauss–Jordan.

$$(\mathcal{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rrrcr} -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & -6x_2 & +10x_3 & = & -2 \end{array} \right. , \quad (\mathcal{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & & & +x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & & & = & -2 \\ & x_2 & +4x_3 & & = & 2 \\ & & x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Exercice 7 (taille des éléments dans la méthode d'élimination de Gauss). Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On note $\widetilde{A}^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, la matrice carrée d'ordre $n-k+1$ formée des éléments $a_{ij}^{(k)}$, $k \leq i, j \leq n$ de la matrice $A^{(k)}$ obtenue à l'issue de la $k-1^{\text{ième}}$ étape de l'élimination de Gauss ($A^{(1)} = A$).

1. En notant $(\cdot\,,\cdot)$ le produit scalaire euclidien et $\widetilde{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^{n-k}$ le vecteur formé des $n-k$ dernières composantes d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^{n-k+1}$ quelconque, établir l'identité
$$(\widetilde{A}^{(k)}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\widetilde{A}^{(k+1)}\widetilde{\boldsymbol{v}}, \widetilde{\boldsymbol{v}}) + \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} \left[a_{kk}^{(k)}\, v_k + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}^{(k)}\, v_i \right]^2 .$$
2. Montrer que chaque matrice $\widetilde{A}^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, est symétrique définie positive.
3. Pour $1 \leq k \leq n-1$, établir les inégalités suivantes :
$$0 < a_{ii}^{(k+1)} \leq a_{ii}^{(k)}, \ k+1 \leq i \leq n,$$
$$\max_{k+1 \leq i \leq n} a_{ii}^{(k+1)} = \max_{k+1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}^{(k+1)}| \leq \max_{k \leq i,j \leq n} |a_{ij}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} a_{ii}^{(k)}.$$

Exercice 8 $\diamond$ (nécessité de choix du pivot de la méthode d'élimination de Gauss en arithmétique non exacte). On souhaite appliquer la méthode d'élimination de Gauss pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, en supposant que l'on travaille avec une arithmétique dans laquelle les nombres réels sont compris, en valeur absolue, entre $1,5 \times 10^{-15}$ et 3×10^{15}.

1. Montrer que, pour une matrice d'ordre 2 inversible A quelconque, on a
$$\mathrm{cond}_2(A) = \sigma + (\sigma^2 - 1)^{1/2} \text{ avec } \sigma = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}|^2}{2\,|\det(A)|}.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que la système linéaire à résoudre a pour matrice et second membre

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les conditionnements $\mathrm{cond}_p(\cdot)$, pour $p = 1, 2, \infty$, des matrices exactes obtenues à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss selon que l'on commence ou non par échanger les deux équations. Qu'en conclure ?
3. Résoudre ce même système en arithmétique exacte, puis en arithmétique non exacte sans et avec une stratégie de choix de pivot. Les résultats obtenus sont-ils en accord avec la conclusion précédente ?

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2012/2013

feuille de travaux dirigés

Méthodes de factorisation pour la résolution de systèmes linéaires

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1. On considère le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
2. Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation trouvée à la question précédente.
3. Calculer le déterminant de la matrice A.

Exercice 2. Déterminer les factorisations LU des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

en précisant à chaque étape les matrices intervenant dans le procédé de factorisation.

Exercice 3 (factorisation LU d'une matrice bande). On dit qu'une matrice est une matrice bande si elle n'admet que des éléments non nuls sur un « certain nombre » de diagonales autour de la diagonale principale. Plus précisément, une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de largeur de bande valant $2p+1$ est telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| > p$.
Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bandes au sens suivant : *soit A une matrice carrée d'ordre n admettant une factorisation LU, alors*

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| > p \Rightarrow\ l_{ij} = 0 \text{ pour } i-j > p \text{ et } u_{ij} = 0 \text{ pour } j-i > p.$$

Exercice 4 (factorisation LU d'une matrice tridiagonale). Soit

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale d'ordre n.

1. Vérifier que si A admet une factorisation LU alors les matrices L et U sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que les coefficients α_i, $1 \leq i \leq n$, et β_j, $2 \leq j \leq n$, satisfont les relations

$$\alpha_1 = b_1,\ \beta_i = \frac{a_i}{\alpha_{i-1}},\ \alpha_i = b_i - \beta_i c_{i-1},\ 2 \leq i \leq n.$$

3. Obtenir les formules découlant de l'utilisation de cette factorisation pour la résolution du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, avec $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$.
4. Donner le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de ce système.

Exercice 5 (factorisation LU d'une matrice à diagonale strictement dominante). Soit A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant les conditions

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'une telle matrice est inversible et qu'elle admet une factorisation LU.

1. Montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes est inversible.
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer que A admet une factorisation LU si et seulement si A^T admet une factorisation LU.
3. Soit A une matrice carrée d'ordre n, que l'on partitionne en quatre blocs de la manière suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{w}^T \\ \hline \boldsymbol{v} & A_1 \end{array}\right),$$

avec $a = a_{11} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et A_1 une matrice carrée d'ordre $n-1$. En effectuant un produit par blocs, vérifier alors que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0} \\ \hline \frac{\boldsymbol{v}}{a} & I_{n-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{w}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & I_{n-1} \end{array}\right),\ \text{avec } B = A_1 - \frac{1}{a}\,\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^T,$$

où $\boldsymbol{0}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^{n-1}$.
4. Montrer que si la matrice B admet une factorisation LU, alors A également.
5. Dans cette question, on suppose que la matrice A^T est à diagonale strictement dominante par lignes.
   a. Montrer que

   $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i| < |a| - |v_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   puis que

   $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| < |(A_1)_{jj}| - |w_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   et enfin que

   $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |b_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| + \frac{|w_j|}{|a|} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i|,\ 1 \leq j \leq n-1.$$

   En déduire que la matrice B^T est à diagonale strictement dominante par lignes.
   b. En admettant éventuellement le résultat de la question précédente et en faisant un raisonnement par récurrence, montrer que A admet une factorisation LU.

6. En supposant à présent que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes, déduire des questions précédentes qu'elle admet une factorisation LU.
7. On considère les trois matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en justifiant très simplement la réponse, lesquelles de ces matrices admettent une factorisation LU et, le cas échéant, calculer leur factorisation LU en précisant à chaque étape les opérations effectuées sur les lignes de la matrice factorisée.

Exercice 6 (factorisation de Cholesky). Une matrice symétrique d'ordre n définie positive est une matrice symétrique d'ordre n telle que

$$\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} \geq 0, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \ \text{et } \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A admet une factorisation de Cholesky s'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B à diagonale principale strictement positive telle que

$$A = BB^T.$$

1. Montrer que si A est symétrique définie positive alors A est inversible.
2. Montrer que si A admet une factorisation de Cholesky alors A est une matrice symétrique définie positive.
3. Montrer que si A admet une factorisation de Cholesky alors A admet une factorisation LDL^T. En déduire que si A admet une factorisation de Cholesky, cette factorisation est unique dès lors que les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs.
4. **Dans toute la suite, on suppose que A est une matrice symétrique d'ordre n définie positive.** On veut prouver que la matrice A admet une factorisation de Cholesky par récurrence sur n.
   a. Pour $n > 1$, écrire la matrice A sous la forme

   $$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{l}^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

   où $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a_{nn} \in \mathbb{R}$ et A_{n-1} est une matrice symétrique d'ordre $n-1$. Montrer que A_{n-1} est définie positive.
   b. On suppose que A_{n-1} admet une décomposition de Cholesky, c'est-à-dire qu'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B_{n-1} telle que $A_{n-1} = B_{n-1}{B_{n-1}}^T$. Montrer que l'on peut déterminer de manière unique $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, tels que

   $$B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ \boldsymbol{m}^T & b \end{pmatrix}$$

   et $A = BB^T$.
   c. En déduire que A admet une factorisation de Cholesky.
5. Écrire l'algorithme permettant de calculer les coefficients de la matrice B.
6. Comparer le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un système linéaire à matrice symétrique définie positive par la méthode de Cholesky avec celui de la méthode d'élimination de Gauss.

7. **Application :** déterminer la factorisation de Cholesky des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & -4 \\ 3 & -7 & 14 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre ε la matrice A est symétrique définie positive.
2. Soit $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par une méthode directe ; quelle factorisation de la matrice A envisager dans ce cas ?
3. Soit maintenant $\varepsilon = 2$.
   a. Vérifier que la matrice A est définie positive et en calculer la factorisation de Cholesky.
   b. En supposant que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant la factorisation calculée à la question précédente.

Exercice 8 (factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique tridiagonale). Soit A une matrice symétrique d'ordre n, définie positive et tridiagonale.

1. Montrer que A admet une factorisation de Cholesky $A = BB^T$, avec B de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

2. Donner un algorithme de calcul des coefficients α_i, $1 \leq i \leq n$, et β_j, $2 \leq j \leq n$, en fonction des coefficients a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, de la matrice A et calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires dans ce cas.
3. En déduire la factorisation de Cholesky de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 $\diamond$ (sur une utilisation de la factorisation de Cholesky). Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique, définie positive et pleine. On cherche à résoudre le système $A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et l'on propose pour cela deux méthodes.

1. Calculer A^2, effectuer la factorisation de Cholesky $A^2 = BB^T$ puis résoudre le système $BB^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
2. Effectuer la factorisation de Cholesky $A = BB^T$ puis résoudre successivement les systèmes $BB^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ et $BB^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour chacune des deux méthodes et comparer.

Exercice 10. Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose muni du produit scalaire euclidien usuel noté $(\cdot\,,\cdot)$ et de la norme associée $\|\boldsymbol{u}\|_2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^{1/2}$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul de $\mathbb{R}^n$, on appelle matrice de Householder associée à $\boldsymbol{u}$ la matrice

$$H(\boldsymbol{u}) = I_n - 2\,\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T}{\|\boldsymbol{u}\|_2{}^2}.$$

Pour tout réel x, on définit la fonction signe par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul, la matrice $H(\boldsymbol{u})$ est symétrique, orthogonale et inversible. Calculer son inverse et le vecteur $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$.
2. Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n. On note a_1 la première colonne de A et on pose
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 - a_{11}\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{b} = \operatorname{sgn}(a_{21})\|\boldsymbol{a}\|_2\,\boldsymbol{e}_2 \text{ et } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$
   a. On suppose que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Montrer que $a_{i1} = 0$ pour $3 \leq i \leq n$.
   b. On suppose $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. On pose $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|_2}$ et $B = H(\boldsymbol{u})AH(\boldsymbol{u})$. On veut montrer que $b_{i1} = 0$ pour $3 \leq i \leq n$ (on rappelle que la première colonne de B n'est autre que $B\,\boldsymbol{e}_1$).
      i. Montrer que $\boldsymbol{e}_1$ est orthogonal à $\boldsymbol{u}$. En déduire que $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$.
      ii. Montrer que $B\boldsymbol{e}_1 = H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}_1$.
      iii. Calculer $H(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ et $H(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.
      iv. En déduire la valeur de $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}$, puis celle de $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}_1$.
   c. En déduire que, quel que soit le vecteur $\boldsymbol{c}$, il existe une matrice symétrique orthogonale P_1 telle que la matrice $B = P_1AP_1$ soit une matrice symétrique semblable[1] à A et telle que $b_{i1} = 0$ pour $3 \leq i \leq n$.
   d. En déduire par récurrence que, pour toute matrice A symétrique d'ordre n, il existe $n-2$ matrices orthogonales P_1, P_2,..., P_{n-2} telles que la matrice $P_{n-2} \dots P_2P_1AP_1P_2 \dots P_{n-2}$ soit tridiagonale, symétrique et semblable à A.

Exercice 11 (factorisation QR). Soit A une matrice réelle d'ordre n inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que
$$A^TA = R^TR.$$
2. En déduire qu'il existe une matrice unitaire Q, c'est-à-dire vérifiant $Q^TQ = QQ^T = I_n$, telle que
$$A = QR. \tag{1}$$
3. Montrer que la décomposition (1) est unique.
4. Notons $(\boldsymbol{a}_j)_{1\leq j\leq n}$ les colonnes de la matrice A, $(\boldsymbol{q}_j)_{1\leq j\leq n}$ celles de Q et posons $R = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
   (a) Montrer que $\boldsymbol{a}_j = \sum_{k=1}^{n} r_{jk}\boldsymbol{q}_k$, $j = 1, \dots, n$.
   (b) En déduire qu'obtenir la factorisation (1) équivaut à construire une base orthonormale à partir de la famille $\{\boldsymbol{a}_j\}_{1\leq j\leq n}$.

1. On rappelle que deux matrices carrées A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

feuille de travaux dirigés

Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1 (convergence de méthodes itératives pour les matrices à diagonale strictement dominante). Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Montrer alors que la matrice A est inversible et que la méthode de Jacobi et de Gauss–Seidel, utilisées pour la résolution du système $Ax = b$, convergent.

Exercice 2. On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel pour cette matrice.
2. Vérifier que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, où B_{GS} et B_J désignent les matrices des méthodes itératives de Gauss–Seidel et de Jacobi respectivement. Laquelle de ces deux méthodes converge le plus rapidement ?

Exercice 3. On considère les méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Étudier la convergence des deux méthodes en fonction du paramètre réel α.

Exercice 4. Soient α et β deux réels. On considère les matrices

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de α (resp. β) la matrice A_α (resp. C_β) est-elle définie positive ?
2. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi associée à A_α (resp. C_β). Pour quelles valeurs de α (resp. β) cette méthode converge-t-elle ?
3. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel associée à A_α (resp. C_β) et calculer son rayon spectral. Pour quelles valeurs de α (resp. β) a-t-on convergence de cette méthode ?

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer (sur des exemples) qu'on ne peut établir un résultat général de comparaison des vitesses de convergence des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi.

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_J) < 1 < \rho(B_{GS})$, où B_{GS} et B_J désignent les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi respectivement.
2. Soit maintenant
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_{GS}) < 1 < \rho(B_J)$.

Exercice 6 (méthode SOR). On considère pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec A une matrice non singulière dont les éléments diagonaux sont tous non nuls, la méthode itérative définie par
$$(D-E)\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = F\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \omega\,\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} + (1-\omega)\,\boldsymbol{x}^{(k)},$$
où ω est un paramètre réel, D est la partie diagonale de A, E est la partie triangulaire inférieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$ et F est la partie triangulaire supérieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$.

1. Réécrire cette méthode itérative sous la forme
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B_\omega \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}_\omega,$$
en explicitant la matrice d'itération B_ω et le vecteur $\boldsymbol{c}_\omega$. Vérifier que l'on retrouve la méthode de Gauss–Seidel lorsque $\omega = 1$.
2. Soit maintenant
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Donner les valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode itérative est convergente dans ce cas.

Exercice 7. Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = I_3 - E - F$ avec
$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{\omega} I_3 - E$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Pour $0 < \omega < 2$, $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on considère, pour la résolution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, la méthode itérative définie par
$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right)\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3\right)\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b},\ \forall k \in \mathbb{N},$$
et on pose $\mathcal{L}_\omega = \left(\dfrac{1}{\omega} I_3 - E\right)^{-1}\left(F + \dfrac{1-\omega}{\omega} I_3\right)$. Calculer, en fonction de ω, les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ et son rayon spectral.

4. Pour quelles valeurs de ω cette méthode converge-t-elle ?
5. Déterminer $\omega_0 \in]0,2[$ vérifiant $\rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \min \left\{ \rho(\mathcal{L}_\omega) \,|\, \omega \in]0,2[,\ \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Exercice 8 (méthode de Richardson). Pour résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, on considère la suite construite par la méthode de Richardson stationnaire non préconditionnée, encore connue sous le nom de méthode du gradient à pas fixe, définie par la relation de récurrence

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha\,(A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}),\ \forall k \in \mathbb{N},$$

avec α un réel non nul.

1. Montrer que, si la méthode converge, la limite $\boldsymbol{x}$ de la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
2. Montrer que, si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
il n'existe pas de α non nul tel que la méthode converge.
3. Discuter la convergence de la méthode lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

Exercice 9. On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, noté $(\cdot\,,\cdot)$, et de la norme associée $\|\boldsymbol{v}\|_2 = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}$. Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant

$$\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,\ (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq c\,{\|\boldsymbol{v}\|_2}^2.$$

1. Montrer que $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$. En déduire que, pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une unique solution.
2. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et on construit la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha(A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$
On note $\boldsymbol{r}^{(k)} = A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}$ le résidu à l'étape k.
   a. Montrer que $\boldsymbol{r}^{(k)} = (I_n - \alpha\,A)\boldsymbol{r}^{(k-1)}$, puis que $\boldsymbol{r}^{(k)} = (I_n - \alpha\,A)^k\boldsymbol{r}^{(0)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
   b. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 < 1$. Montrer que
   $${\|(I_n - \alpha\,A)\boldsymbol{x}\|_2}^2 \leq \alpha^2{\|A\|_2}^2 - 2c\alpha + 1.$$
   c. En déduire que $\|I_n - \alpha\,A\|_2 \leq 1$ pour α appartenant à un intervalle bien choisi.
3. Déduire de la question précédente une condition nécessaire sur α pour que la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Exercice 10 (classement de pages web). On cherche à calculer l'« importance », représentée par une note ou indice, d'une série de pages web. On rappelle que l'indice d'« importance » d'une page B est donnée par la formule suivante :

$$PR(B) = 0,2 + 0,8\left(\frac{PR(B_1)}{N(B_1)} + \cdots + \frac{PR(B_{k(B)})}{N(B_{k(B)})}\right),$$

où les B_i, $1 \leq i \leq k(B)$ désignent les pages qui ont un lien pointant vers B et $N(B_i)$ est le nombre de liens de la page B_i.
On considère le cas de quatre pages B_1, B_2, B_3 et B_4 où la page B_1 pointe vers les pages B_2, B_3 et B_4, la page B_2 pointe vers B_1, B_3 et B_4, la page B_3 pointe vers B_1, B_2 et B_4 et la page B_4 pointe vers B_1, B_2 et B_3.

1. Écrire le système linéaire lié au cas considéré ci-dessus, où l'inconnue est le vecteur $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} PR(A) & PR(B) & PR(C) & PR(D) \end{pmatrix}^T$.
2. Étendre la question précédente à n pages web, c'est-à-dire au cas où, pour tout indice $1 \leq i \leq n$, la page B_i pointe vers les $n-1$ autres pages $B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_n$.
3. Montrer que les valeurs propres de la matrice d'ordre n

$$\begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$$

sont égales à $(n-1)a$ et $-a$ (de multiplicité $n-1$).
4. Montrer que la matrice du système linéaire de la question 2 est définie positive (on pourra utiliser les résultats de la question 3). Quelle méthode directe utilisera-t-on pour résoudre ce système ?
5. Donner les équations vérifiées par les coefficients de la matrice L de la factorisation de Cholesky de

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Donner un argument simple pour justifier la convergence des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi appliquées à la matrice obtenue à la question 2. Que vaut le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Jacobi ? Pour $n = 5$, 10, 20 et 40, le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel vaut respectivement $0,6461268$, $0,6480678$, $0,6490204$ et $0,6494924$. Quelle méthode préférera-t-on utiliser ?
7. Donner la solution (évidente) du système de la question 2 et commenter le résultat obtenu.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2012/2013

feuille de travaux dirigés

Méthodes de résolution d'équations non linéaires

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1 (vitesse de convergence de la méthode de la fausse position). Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)f(b)<0$. La méthode de la fausse position appliquée à la recherche d'un zéro de f est obtenue en remplaçant dans l'algorithme de la méthode de dichotomie le point milieu $x^{(k)}=\frac{1}{2}(a^{(k)}+b^{(k)})$ par l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points $(a^{(k)},f(a^{(k)}))$ et $(b^{(k)},f(b^{(k)}))$ avec l'axe des abscisses.

1. Déterminer $x^{(k)}$ en fonction de $a^{(k)}$, $f(a^{(k)})$, $b^{(k)}$ et $f(b^{(k)})$.
2. Pour étudier la vitesse de convergence de cette méthode, on fait les hypothèses additionnelles que f est deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$ et que les dérivées f' et f'' ne s'annulent pas sur cet intervalle, de telle sorte que ξ soit une racine simple de $f(x)=0$. Dans ces conditions, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode converge vers ξ.

   a. Montrer qu'il existe $\theta\in[a,b]$ tel que
   $$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)+\frac{1}{2}\,(x-a)(x-b)f''(\theta).$$
   Indication : on pourra poser, pour tout $x\in]a,b[$ fixé et tout $t\in[a,b]$,
   $$\phi(t)=f(t)-p(t)-\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)(x-b)}\,(t-a)(t-b),\ \textit{avec}\ p(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a),$$
   et utiliser le théorème de Rolle.

   b. En appliquant le résultat précédent au point ξ et à l'intervalle $[a^{(k)},b^{(k)}]$, montrer qu'il existe $\theta^{(k)}\in[a^{(k)},b^{(k)}]$ tel que
   $$\frac{f(b^{(k)})-f(a^{(k)})}{b^{(k)}-a^{(k)}}\,(\xi-x^{(k)})=-\frac{1}{2}\,(\xi-a^{(k)})(\xi-b^{(k)})f''(\theta^{(k)}).$$

   c. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $\eta^{(k)}\in[a^{(k)},b^{(k)}]$ tel que
   $$\xi-x^{(k)}=-\frac{1}{2}\,(\xi-a^{(k)})(\xi-b^{(k)})\,\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}.$$

   d. On suppose à présent que $f'(x)>0$ et $f''(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$, montrer que $b^{(k+1)}=b$ et $a^{(k+1)}=x^{(k)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Étudier alors le comportement de la suite $\left(\frac{|\xi-x^{(k+1)}|}{|\xi-x^{(k)}|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 2 (étude de convergence de la méthode de point fixe). Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application continue de $[a,b]$ dans lui-même.

1. Montrer que g possède au moins un point fixe ξ dans l'intervalle $[a,b]$.

2. On suppose à présent que la fonction g est continûment dérivable dans un voisinage $I = [\xi - h, \xi + h]$ de ξ et que, **uniquement dans cette question**, $|g'(\xi)| < 1$. On va montrer que la suite définie par

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

converge vers ξ dès que l'initialisation $x^{(0)}$ est suffisamment proche de ξ. On dit alors que ξ est un point fixe stable de g.

   a. Montrer qu'il existe $0 < \delta \leq h$ tel que

$$|g'(x) - g'(\xi)| \leq \frac{1}{2}\left(1 - |g'(\xi)|\right), \ \forall x \in I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta].$$

   b. En déduire qu'il existe une constante $0 < L < 1$ telle que $|g'(x)| \leq L$, $\forall x \in I_\delta$.

   c. En déduire que si $x^{(k)} \in I_\delta$, alors

$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq L\,|x^{(k)} - \xi|,$$

   et que, si $x^{(0)} \in I_\delta$, alors

$$x^{(k)} \in I_\delta \text{ et } |x^{(k)} - \xi| \leq L^k\,|x^{(0)} - \xi|, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

   d. En conclure que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ.

3. On suppose dans cette question que $|g'(\xi)| > 1$. En s'inspirant des étapes de la question précédente, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour k suffisamment grand, $x^{(k)}$ n'appartient pas à I_δ. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut *a priori* converger vers ξ, quelle que soit l'initialisation $x^{(0)} \neq \xi$. On dit alors que ξ est un point fixe[1] instable de g.

4. **Application.** Étudier les méthodes de point fixe associées aux fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \ln(1 + x) + 0{,}2, \ g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + c), \text{ avec } 0 \leq c < 1, \text{ et } g_3(x) = -\ln(x).$$

Exercice 3. On souhaite calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ par une méthode de point fixe utilisant la fonction

$$g(x) = \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + (1 - \omega)\,x^3 + \frac{2\omega}{3\,x^2} + 2(\omega - 1),$$

ω étant un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs du paramètre ω le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode proposée ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode proposée est-elle au moins d'ordre deux ?
3. Existe-t-il une valeur du paramètre ω telle que l'ordre de la méthode de point fixe est supérieur à deux ?

Exercice 4 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro simple). Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ξ un zéro simple de f, c'est-à-dire tel que $f(\xi) = 0$ et $f'(\xi) \neq 0$, contenu dans $[a, b]$.

On se propose de déterminer le zéro ξ par la méthode de Newton–Raphson, c'est-à-dire en tant que limite de la suite récurrente définie par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}), \ k \geq 0,$$

l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. Le réel ξ étant aussi un point fixe de la fonction ϕ, on rappelle que l'ordre de convergence d'une méthode itérative de la forme $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ est égal à r, avec $r \geq 1$, s'il existe, pour k suffisamment grand, une constante $C > 0$ telle que

$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq C|x^{(k)} - \xi|^r.$$

1. En effet, si $x^{(0)} = \xi$, alors la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut ξ.

1. Montrer que, pour $x^{(k)}$ suffisamment proche de ξ, $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\xi - x^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{f'(x^{(k)})}\, f''\left(x^{(k)} + \theta(\xi - x^{(k)})\right)\,(\xi - x^{(k)})^2,\ 0 < \theta < 1,$$

et en conclure que l'ordre de convergence de la méthode de Newton–Raphson est deux.
2. En déduire qu'il existe $K > 0$ telle que si $|x^{(0)} - \xi| \leq K$, alors la méthode de Newton–Raphson converge.

Exercice 5 (exemple de divergence de la méthode de Newton–Raphson). On considère la fonction $f(x) = \arctan(x)$, qui a pour zéro $\xi = 0$.

1. Écrire l'équation de récurrence de la méthode de Newton–Raphson utilisée pour approcher le zéro de f. On notera g la fonction dont ξ est le point fixe ainsi définie.
2. Montrer que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1+x^2}$$

alors $|g(x)| > |x|$.
3. Étudier l'application $x \mapsto (1+x^2)\arctan(x) - 2\,x$ sur $[0, +\infty[$. En déduire que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1+x^2}$$

alors

$$\arctan(|g(x)|) > \frac{2\,|g(x)|}{1+g(x)^2}.$$
4. En conclure que si

$$\arctan(|x^{(0)}|) > \frac{2\,|x^{(0)}|}{1+(x^{(0)})^2}$$

alors

$$\lim_{k\to+\infty} |x^{(k)}| = +\infty.$$

Exercice 6 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro multiple). Soit f une fonction $m+1$ fois continûment dérivable ($m \geq 2$) dans l'intervalle $[a, b]$ et ξ un zéro multiple de f d'ordre m, c'est-à-dire tel que

$$f(\xi) = f'(\xi) = \dots = f^{(m-1)}(\xi) = 0 \text{ et } f^{(m)}(\xi) \neq 0,$$

contenu dans $[a, b]$. On cherche à appliquer la méthode de Newton–Raphson pour approcher ξ, en définissant la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}),\ k \geq 0,$$

l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. On note que la fonction g n'est pas définie au point ξ.

1. Montrer alors que l'on peut prolonger g par continuité et que la fonction ainsi obtenue est dérivable au voisinage de ξ, telle que

$$g'(\xi) = 1 - \frac{1}{m}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que si $|x^{(0)} - \xi| \leq K$ alors la méthode de Newton–Raphson converge et que cette convergence est linéaire.

3. On suppose la valeur de l'entier m connue *a priori*. On a alors recours à la méthode modifiée, définie par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},\ k \geq 0,$$

avec $x^{(0)}$ donnée. Quel est l'ordre de convergence de cette nouvelle méthode ?

Exercice 7 (étude de la méthode de Héron pour le calcul de $\sqrt{2}$). Pour calculer $\sqrt{2}$, on propose de construire une suite récurrente définie par

$$x^{(0)} = 1,\ x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{2}{x^{(k)}}\right) \text{ pour } k \geq 0.$$

1. Étudier la fonction $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer son graphe.
2. Construire graphiquement les premiers termes de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Vérifier que g est une application contractante de $[1,2]$ dans lui-même. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Pour quelles valeurs de l'initialisation $x^{(0)}$ la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
5. Montrer que la convergence de cette méthode est quadratique. Que dire d'autre ?

Exercice 8 $\diamond$ (méthode de Newton–Raphson à deux pas). Soit f une fonction deux fois continûment dérivable dans l'intervalle $[a,b]$ et ξ un zéro simple de f. On introduit la méthode de Newton–Raphson à deux pas définie par les relations de récurrence

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},\ x^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{f(y^{(k)})}{f'(x^{(k)})},\ k \geq 0,$$

l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée.

1. Montrer que l'on peut écrire, pour $x^{(k)}$ suffisamment proche de ξ,

$$x^{(k+1)} - \xi = (y^{(k)} - \xi)(x^{(k)} - \xi)\frac{f''(\zeta_2^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - (y^{(k)} - \xi)^2\frac{f''(\zeta_1^{(k)})}{2f'(x^{(k)})}$$

avec $\zeta_1^{(k)} = \xi + \theta_1^{(k)}(y^{(k)} - \xi)$, $\zeta_2^{(k)} = \xi + \theta_2^{(k)}(x^{(k)} - \xi)$, $0 < \theta_i^{(k)} < 1$ avec $i = 1,2$.

2. Montrer que, si la méthode converge, alors

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x^{(k+1)} - \xi}{(x^{(k)} - \xi)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right)^2,$$

et en déduire l'ordre de convergence de la méthode.

3. Montrer enfin qu'il existe $K > 0$ tel que si $|x^{(0)} - \xi| \leq K$ alors la méthode converge en effet.

Exercice 9 $\diamond$ (méthode de Steffensen). Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, possédant un zéro ξ tel que $f(\xi) = 0$ et $f'(\xi) \neq 0$. On considère la méthode de Steffensen, définie par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{g(x^{(k)})},\ g(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)} + f(x^{(k)})) - f(x^{(k)})}{f(x^{(k)})},\ k \geq 0,$$

l'initialisation $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ étant donnée.

1. Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que si $x^{(k)} \in B(\xi, R)$, alors $f(x^{(k)} + f(x^{(k)})) \neq f(x^{(k)})$ si $x^{(k)} \neq \xi$. En déduire que si $x^{(0)} \in B(\xi, R)$, alors la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie pourvu que $x^{(k)} \neq \xi$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer par des développements de Taylor avec reste intégral qu'il existe une fonction h continue sur un voisinage de ξ telle que si $x^{(0)} \in B(\xi, R)$, alors

$$x^{(k+1)} = h(x^{(k)})(x^{(k)} - \xi),\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^{(k)} \neq \xi.$$

3. Montrer que la méthode est localement convergente en ξ et que son ordre de convergence est au moins égal à deux.
4. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de Newton–Raphson ?

Exercice 10 $\diamond$ (accélération de la convergence d'une méthode de point fixe par le procédé Δ^2 d'Aitken). Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et g une fonction de I dans I, deux fois continûment dérivable sur I et admettant un point fixe ξ. On étudie une technique visant à accélérer la convergence de méthodes d'approximations successives du type

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),\ k \geq 0,\ x^{(0)} \neq \xi \text{ donné},$$

que l'on suppose convergente avec

$$\|g'\|_\infty = \sup_{x \in I} |g'(x)| < 1.$$

1. On pose $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lambda = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{e^{(k+1)}}{e^{(k)}}$.
2. On pose ensuite $\lambda^{(k)} = \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$, $\forall k \geq 1$. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda^{(k)} = \lambda$.
3. On introduit la suite auxiliaire du procédé Δ^2 d'Aitken, définie pour tout $k \geq 1$ par

$$z^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right)^2}{x^{(k+1)} - 2\,x^{(k)} + x^{(k-1)}}.$$

   Vérifier que

$$z^{(k)} = \frac{x^{(k+1)} - \lambda^{(k)} x^{(k)}}{1 - \lambda^{(k)}},$$

   puis exprimer le quotient $\dfrac{z^{(k)} - \xi}{x^{(k)} - \xi}$ en fonction de $e^{(k+1)}$, $e^{(k)}$ et $\lambda^{(k)}$.
4. En déduire que les approximations $z^{(k)}$ convergent plus vite que les approximations $x^{(k)}$, c'est-à-dire que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{z^{(k)} - \xi}{x^{(k)} - \xi} = 0.$$

5. Montrer que l'application du procédé d'Aitken à la méthode de point fixe initiale conduit à la construction de la suite $(\overline{x}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \frac{\left(g(\overline{x}^{(k)}) - \overline{x}^{(k)}\right)^2}{g(g(\overline{x}^{(k)})) - 2\,g(\overline{x}^{(k)}) + \overline{x}^{(k)}} = \psi(\overline{x}^{(k)}),$$

   $\overline{x}^{(0)}$ étant choisi égal à $x^{(0)}$.
6. Prouver que la fonction ψ est dérivable et que $\psi'(\xi) = 0$. En déduire alors que la méthode basée sur le procédé d'Aitken converge quadratiquement dès que $x^{(0)}$ suffisamment proche de ξ. A-t-on besoin de supposer que la méthode de point fixe initiale est convergente ?

feuille de travaux dirigés

Interpolation polynomiale

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-1,1]$, interpolée aux nœuds -1 et 1. Montrer que, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1]$, on a alors

$$|f(x) - \Pi_1 f(x)| \leq \frac{M_2}{2}(1-x^2) \leq \frac{M_2}{2},\ \forall x \in [-1,1],$$

où $M_2 = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est une égalité.

Exercice 2. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, de la fonction $f : x \mapsto x^3$, interpolée aux nœuds 0 et a. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0,a[$, il existe un point $c \in [0,a]$ tel que

$$f(x) - \Pi_1 f(x) = \frac{f''(c)}{2}\, x(x-a),$$

et établir que $c = \frac{1}{3}(x+a)$.
Considérer ensuite la fonction $f : x \mapsto (2x-a)^4$ et montrer que, dans ce cas, il y a deux valeurs possibles pour c. Les déterminer.

Exercice 3. Soit n un entier positif. Étant donnés $n+2$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n+1$, et $n+2$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n+1$, on note $\Pi_{0,\dots,n}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n}$ et $\Pi_{1,\dots,n+1}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de points $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\dots,n+1}$. On pose

$$p(x) = \frac{(x-x_0)\,\Pi_{1,\dots,n+1}(x) - (x-x_{n+1})\,\Pi_{0,\dots,n}(x)}{x_{n+1}-x_0}.$$

Montrer que p est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $n+1$ associé aux points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n+1}$.

Exercice 4 (forme de Newton du polynôme d'interpolation). Soit n un entier strictement positif. Étant donné $n+1$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n$, et $n+1$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n$, on note Π_j, $j \in \{0,\dots,n\}$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré j associé aux points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,j}$.

1. On pose
$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + q_n(x).$$
Montrer que $q_n(x) = a_n\,\omega_n(x)$, où a_n est un coefficient à expliciter et $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$. La constante a_n est appelée $n^{ième}$ *différence divisée de Newton* et sera notée $[x_0,\dots,x_n]\boldsymbol{y}$ dans la suite de l'exercice.

2. On pose $[x_0]\boldsymbol{y} = y_0$ et $\omega_0 \equiv 1$. Montrer que

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, \dots, x_k]\boldsymbol{y}\, \omega_k(x),$$

où $[x_0, \dots, x_k]\boldsymbol{y}$ est la $k^{\text{ième}}$ différence divisée de Newton. Cette écriture est appelée *forme de Newton* du polynôme d'interpolation.

3. Montrer que

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\, \omega'_{n+1}(x_i)}\, y_i,$$

et en déduire que

$$[x_0, \dots, x_n]\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

4. Obtenir enfin la formule de récurrence permettant le calcul des différences divisées :

$$[x_0, \dots, x_n]\boldsymbol{y} = \frac{[x_1, \dots, x_n]\boldsymbol{y} - [x_0, \dots, x_{n-1}]\boldsymbol{y}}{x_n - x_0}.$$

Peut-on en déduire un avantage de la forme de Newton du polynôme d'interpolation sur la forme de Lagrange ?

Exercice 5 $\diamond$ (phénomène de Runge). Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas, en général, convergence simple de la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange d'une fonction lorsque le nombre de points d'interpolation (répartis uniformément) converge vers l'infini. Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left| \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x - (b - a) g\left(\frac{a + b}{2}\right) \right| \leq \frac{M}{24}(b - a)^3.$$

2. En divisant l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux, en déduire que

$$\left| \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x - \frac{(b - a)}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(a + (b - a)\frac{2k - 1}{2n}\right) \right| \leq \frac{M}{24} \frac{(b - a)^3}{n^2}. \tag{2}$$

3. Soit $\lambda > 0$ un réel strictement positif. Sur l'intervalle $[-1, +1]$, on pose

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{x^2 + \lambda^2}.$$

On définit alors les points $x_k = \frac{2k+1}{2n} - 1$ pour $0 \leq k \leq 2n - 1$ et on appelle $\Pi_n f_\lambda$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f_λ en ces points.

a. Montrer que $x_k = -x_{2n-1-k}$ et que $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - {x_k}^2)$ divise exactement le polynôme $1 - (x^2 + \lambda^2)\, \Pi_n f_\lambda(x)$.

b. Établir la formule suivante pour tout réel x

$$f_\lambda(x) - \Pi_n f_\lambda(x) = (-1)^n f_\lambda(x) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x^2 - {x_k}^2}{{x_k}^2 + \lambda^2}.$$

Indication : on remarquera que $(x^2 + \lambda^2)\, \Pi_n f_\lambda(x)$ est un polynôme de degré au plus $2n+1$ qui admet les racines complexes $\pm i\lambda$.

c. À l'aide de (2), trouver un équivalent asymptotique en n du produit $\prod_{k=0}^{n-1}({x_k}^2 + \lambda^2)$ quand n tend vers l'infini.
Indication : on pourra prendre $g(x) = \ln(x^2 + \lambda^2)$.

d. À l'aide de la formule de Stirling ($n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$), donner un équivalent asymptotique en n du produit $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - {x_k}^2)$ lorsque n tend vers l'infini.

e. En déduire un équivalent de $f_\lambda(1)-\Pi_n f_\lambda(1)$. À quelle condition sur λ cette suite converge-t-elle vers 0 ? Que dire du cas $\lambda = 1/5$?

Exercice 6 (polynômes de Tchebychev et meilleurs points d'interpolation). Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer que les points $x_0, \ldots, x_n$ appartenant à un intervalle $[a, b]$ et minimisant [1]

$$\sup_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right|$$

sont reliés aux racines d'un polynôme particulier, dit *de Tchebychev*. Quitte à effectuer un changement de variable affine, on peut supposer que $[a, b] = [-1, 1]$. Pour tout x dans l'intervalle $[-1, 1]$, on pose alors $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Montrer que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ et que l'on a la relation de récurrence

$$T_{n+2}(x) = 2x\, T_{n+1}(x) - T_n(x).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que le polynôme T_n est de degré n, que son monôme de plus haut degré est $2^{n-1}x^n$ et que ses racines sont les nombres $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$ (T_n est alors appelé le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev).
3. Montrer que la fonction T_n admet sur $[-1, 1]$ des extrema locaux aux points $x'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$, $k = 0, \ldots, n$, et que $T_n(x'_k) = (-1)^k$.
4. Montrer alors que

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|,$$

pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$, les points x_k, $k = 0, \ldots, n$, étant les racines du polynôme T_{n+1}.

Exercice 7 $\diamond$ (polynôme de meilleure approximation uniforme). Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Le but de cet exercice est de montrer qu'un polynôme P de meilleure approximation uniforme d'une fonction f à l'ordre n est unique (on sait qu'il existe) et qu'il est caractérisé comme étant le polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que $(f - p)$ équioscille [2] sur au moins $n + 2$ points de $[a, b]$.

1. On va tout d'abord prouver par l'absurde que si $P \in \mathbb{P}_n$ est un polynôme réalisant le minimum de la distance $\|f - P\|_{\infty,]a,b[}$, alors $g = f - P$ équioscille sur $n + 2$ points de $[a, b]$.

   a. Soient x_0 le premier point en lequel g atteint sa valeur maximale, $x_1 > x_0$ le point tel que $g(x_1) = -g(x_0)$,..., x_{i+1} le premier point plus grand que x_i en lequel $g(x_{i+1}) = -g(x_i)$. On suppose que cette suite s'arrête en $i = k \leq n$. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels c_1, c_2,..., c_k telle que

$$a \leq x_0 < c_1 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < c_k < x_k \leq b.$$

1. Cette quantité apparaît dans l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - \Pi_n f(x)$, mesurée en norme du maximum, d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

2. On dit qu'une fonction $g \in \mathscr{C}([a, b])$ *équioscille* sur $k+1$ points de $[a, b]$ s'il existe des points $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ dans $[a, b]$ tels que

$$|g(x_i)| = \|g\|_{\infty,]a,b[},\ i = 0, \ldots, k, \text{ et } g(x_{i+1}) = -g(x_i),\ i = 0, \ldots, k-1.$$

b. On suppose, par exemple, que $g(x_0) > 0$ et on pose

$$\Pi(x) = (c_1 - x)(c_2 - x) \dots (c_k - x),\ \Pi \in \mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n,$$

$$g_\varepsilon(x) = g(x) - \varepsilon\,\Pi(x) = f(x) - (p(x) + \varepsilon\,\Pi(x)).$$

Montrer que $\|g_\epsilon\|_{\infty,]a,b[} \leq \|g\|_{\infty,]a,b[}$ pout tout ε strictement positif. En déduire une contradiction.

2. Montrer, par raisonnement par l'absurde, que tout polynôme $Q \in \mathbb{P}_n$, $Q \neq P$, il existe un point x_i, $0 \leq i \leq n+1$, tel que

$$(-1)^i\,(f(x_i) - Q(x_i)) > (-1)^i\,(f(x_i) - P(x_i))\,.$$

En déduire l'unicité de P.

3. **Application :** on rappelle que les polynômes de Tchebychev sont définis comme étant les fonctions $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

a. Retrouver les relations de récurrence entre polynômes de Tchebychev et en déduire que $T_n \in \mathbb{P}_n$.

b. Déterminer les racines de T_n.

c. Montrer que $T_n(x)$ est le polynôme de meilleure approximation uniforme de à l'ordre n de x^{n+1} sur $[-1, 1]$.

d. En déduire que $2^{-n}T_{n+1}$ est le polynôme unitaire de degré $n+1$ ayant la plus petite norme uniforme possible sur $[-1, 1]$.

Exercice 8 $\diamond$ (polynôme de meilleure approximation au sens des moindres carrés et matrice de Hilbert). Soit u une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme q_n de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que

$$\int_0^1 (u(x) - q_n(x))^2\,\mathrm{d}x = \inf_{p \in \mathbb{P}_{n-1}([0,1])} \int_0^1 (u(x) - p(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

2. En posant $q_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i\,x^{i-1}$, démontrer que le vecteur $U = (u_i)_{1\leq i \leq n}$ est solution d'un système linéaire de la forme $H\,U = b$, où H est la matrice de Hilbert d'ordre n, c'est-à-dire dont les éléments sont

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1},\ 1 \leq i, j \leq n.$$

3. Montrer qu'une matrice de Hilbert est définie positive (et, par conséquent, inversible).

4. Cependant, le conditionnement $\mathrm{cond}_2(H)$ d'une matrice de Hilbert est une fonction très rapidement croissante de l'entier n (on s'en convaincra en le calculant aussi précisément que possible[3] pour $n = 2, 3, 4$ et 5). Quelle propriété est-il alors préférable que les polynômes de base de $\mathbb{P}_{n-1}$ vérifient ?

3. Pour $n = 5$, on a $\mathrm{cond}_2(H) \simeq 4,76\ 10^5$, pour $n = 10$, $\mathrm{cond}_2(H) \simeq 1,60\ 10^{13}$.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2012/2013

---

feuille de travaux dirigés

Formules de quadrature

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel et/ou difficile.

Exercice 1 (erreur pour la formule de quadrature de Simpson). Soit $[a, b]$ un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La formule de Simpson est une formule de quadrature interpolatoire pour laquelle une approximation de l'intégrale de la fonction f entre a et b est obtenue en remplaçant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré deux aux nœuds $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, noté $\Pi_2 f$.

1. Définir et expliciter le polynôme d'interpolation $\Pi_2 f$, puis déterminer

$$I_2(f) = \int_a^b \Pi_2 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, f(x_i).$$

2. On suppose maintenant que $f \in \mathscr{C}^4([a, b])$ et on introduit l'erreur de quadrature $E_2(f) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - \Pi_2 f(x))\,\mathrm{d}x$. On va montrer que

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c),\ \text{avec } c \in]a, b[.$$

Pour t appartenant à $[-1, 1]$, on pose $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$, $F(t) = f(x)$ et

$$G(t) = \int_{-t}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u - \frac{t}{3}\left[F(-t) + 4F(0) + F(t)\right].$$

a. Montrer que $E_2(f) = \frac{1}{2}(b-a)G(1)$.

b. Soit $H(t) = G(t) - t^5 G(1)$. Montrer qu'il existe $\zeta \in]-1, 1[$ tel que $H'''(\zeta) = 0$.

c. En déduire qu'il existe $\xi \in]-\zeta, \zeta[$ tel que

$$H'''(\zeta) = -\frac{2\zeta^2}{3}\left[F^{(4)}(\xi) + 90G(1)\right],$$

et, par suite, que

$$G(1) = -\frac{1}{90}F^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^4}{1440} f^{(4)}(c).$$

3. Quelle est le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?

Exercice 2 (erreur de quadrature et noyau de Peano). On note $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

1. Soit une fonction $f \in \mathscr{C}([-1, 1])$. On note $\Pi_2 f \in \mathbb{P}_2$ le polynôme d'interpolation de f aux points -1, 0 et 1. Donner l'expression des polynômes de Lagrange l_i, $i = 0, 1, 2$, tels que

$$\Pi_2 f(x) = f(-1)\, l_0(x) + f(0)\, l_1(x) + f(1)\, l_2(x).$$

En déduire les coefficients α_i, $i = 0, 1, 2$, tels que la formule de quadrature

$$I_2(f) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1), \tag{3}$$

approchant l'intégrale de f entre -1 et 1, soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux (c'est-à-dire si $f \in \mathbb{P}_2$).

2. On suppose que $f \in \mathbb{P}_3$ et on note $s \in \mathbb{P}_3$ le polynôme tel que

$$f(x) = \Pi_2 f(x) + s(x).$$

Montrer que s est de la forme

$$s(x) = a(x^2 - 1)x, \; a \in \mathbb{R},$$

et en déduire que la formule (3) est en fait exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

3. On supposera dans toute la suite que $f \in \mathscr{C}^4([-1, 1])$ et on rappelle que, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} f^{(4)}(t)(x-t)_+^3 \,\mathrm{d}t,$$

avec $p \in \mathbb{P}_3$ et

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x - t & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}.$$

En déduire dans ce cas que l'erreur $R(f)$ de la formule de quadrature s'écrit

$$R(f) = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} K(t) f^{(4)}(t) \,\mathrm{d}t,$$

où K est une fonction définie sur $[-1, 1]$ dont on précisera l'expression générale [1].

4. On admet le fait que la fonction K est paire. Calculer explicitement $K(t)$ pour $t \in [0, 1]$ et montrer que l'on trouve

$$K(t) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(1-t)^3(1+3t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ K(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}.$$

5. Vérifier que $K(x)$ ne change pas de signe sur l'intervalle $[-1, 1]$, puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$R(f) = \frac{1}{6} f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^{1} K(t) \,\mathrm{d}t.$$

En déduire enfin l'expression

$$R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}.$$

6. On considère maintenant l'intervalle $[-h, h]$, $h > 0$. Déduire de ce qu'il précède une formulation de quadrature

$$\int_{-h}^{h} f(x) \,\mathrm{d}x = b_1 \, f(-h) + b_2 \, f(0) + b_3 \, f(h) + R_h(f),$$

pour des fonctions f continues dans $[-h, h]$, exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois, $R_h(f)$ l'erreur d'intégration que l'on déterminera lorsque $f \in \mathscr{C}^4([-h, h])$. *Indication : on pourra introduire la fonction $g(u) = f(hu)$, $u \in [-1, 1]$.*

1. La fonction K est le noyau de Peano associée à la formule de quadrature considérée.

Exercice 3 (règle du trapèze et formule d'Euler–Maclaurin). Soit l'intervalle $[0,1]$ et une fonction $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$. On note

$$I_1(f) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right),$$

l'approximation de l'intgrale de f sur $[0,1]$ par la règle du trapèze.

1. En écrivant
$$f(x) = f(0) + \int_0^1 f'(t) q(x,t)\,\mathrm{d}t,$$
avec
$$q(x,t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leq x, \\ 0 \text{ si } t > x \end{cases},$$
montrer que
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I_1(f) + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t\right) f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

2. On cherche à présent à généraliser le résultat (4) en supposant que $f \in \mathscr{C}^{m+1}([0,1])$, $m \geq 1$. On note $f^{(j)}$ la dérivée $j^{\text{ème}}$ de f, $1 \leq j \leq m+1$. Montrer par récurrence que l'on peut, pour tout $1 \leq n \leq m$, écrire
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I_1(f) + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 f^{(j)}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 P_{n+1}(x) f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$
où les fonctions P_j, $1 \leq j \leq m+1$, sont polynomiales de degré j et les coefficients a_j, $1 \leq j \leq m$ sont des nombres réels, définis par des relations de récurrence suivantes :
$$P_1(x) = \frac{1}{2} - x,\ a_1 = 0,$$
$$P_{j+1}(x) = \int_0^x (a_j - P_j(t))\,\mathrm{d}t,\ a_{j+1} = \int_0^1 P_{j+1}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$
Indication : on opérera une intégration par parties dans (4) *en remarquant que*
$$P_j = a_j - P'_{j+1} \text{ et } P_{j+1}(0) = P_{j+1}(1) = 0.$$

3. Montrer par récurrence que les fonctions P_j, $1 \leq j \leq m+1$, définies par (6) vérifient la relation de symétrie
$$P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x),\ \forall x \in [0,1],$$
et que les coefficients a_j, $1 \leq j \leq m$, d'indice impair sont nuls.
Indication : on observera que si la relation de symétrie est vérifiée alors, par définition, $a_{2i+1} = 0$.

4. Soit un intervalle $[a,b]$, une fonction f de $\mathscr{C}^{2m+2}([a,b])$ et N un entier strictement positif. On pose $H = (b-a)/N$ et on rappelle que la règle du trapèze composée à N sous-intervalles est donnée par
$$I_{N,1}(f) = H\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(a + j\,H)\right].$$
En posant $x_j = a + j\,H$, $0 \leq j \leq N$, et en considérant les sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N-1$, de $[a,b]$, montrer, à l'aide de la relation (5) et en tenant compte du résultat de la question précédente, que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{N,1}(f) + \sum_{j=1}^{m} a_{2j}\, H^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)\,\mathrm{d}x + H^{2m+2} \int_a^b \overline{P}_{2m+2}(x) f^{(2m+2)}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

où $\overline{P}_{2m+2}(x) = P_{2m+2}\left((x - x_j)/H_N\right)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $0 \le j \le N-1$, les coefficients a_{2j}, $1 \le j \le m$ et les fonctions polynomiales P_{2j+2}, $1 \le j \le m$, étant définis par les relations (6). La formule (7) est appelée formule d'Euler–Maclaurin.

5. **Application :** montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$
à l'aide de la formule d'Euler–Maclaurin (7).

Exercice 4 $\diamond$ **(formule de quadrature utilisant les points de Tchebychev).** Le but de cet exercice est d'établir quelques résultats sur la formule de quadrature obtenue en remplaçant une fonction f par $\Pi_n f$, son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n aux points de Tchebychev $x_i = \cos(\theta_i)$, avec $\theta_i = \frac{2i+1}{2n+2}\,\pi$, $0 \le i \le n$, dans son intégrale entre -1 et 1. Dans la suite, T_n désigne le polynôme de Tchebychev de degré n.

1. Montrer que les polynômes de Lagrange l_i, $0 \le i \le n$, associés aux points de Tchebychev sont donnés par
$$l_i(x) = \frac{(-1)^i \sin(\theta_i)}{n+1}\,\frac{T_{n+1}(x)}{x - x_i}.$$
2. Pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note
$$a_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos(x)) - \cos(n \arccos(y))}{x - y}\,\mathrm{d}y.$$
Montrer que la fonction a_n est polynomiale de degré n et que l'on a
$$\int_{-1}^{1} \Pi_n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i), \text{ avec } \alpha_i = \frac{(-1)^i \sin(\theta_i)}{n+1}\,a_{n+1}(x_i),\ 0 \le i \le n.$$
3. Calculer $a_{n+1}(x) - a_{n-1}(x)$ et en déduire la valeur de $a_{n+1}(x) - 2x\,a_n(x) + a_{n-1}(x)$.
4. En distinguant deux cas suivant la parité de n, montrer l'égalité
$$a_n(\cos(\theta))\sin(\theta) = 2\sin(n\theta) - 4\sum_{k=1}^{n/2} \frac{\sin((n-2k)\theta)}{4k^2 - 1}.$$
5. En déduire l'expression des poids de quadrature
$$\alpha_i = \frac{1}{n+1}\left(2 - 4\sum_{k=1}^{(n+1)/2} \frac{\cos(2k\theta_i)}{4k^2 - 1}\right),\ i = 0, \ldots, n,$$
et montrer qu'ils sont strictement positifs.