Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

Contrôle continu du 7 avril 2014

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (8 points). Une matrice carrée A d'ordre n est dite de Toeplitz s'il existe au plus $2n-1$ scalaires distincts $a_{-n+1}, \dots, a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $a_{ij} = a_{j-i}$, $1 \leq i, j \leq n$, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{-n+2} & \dots & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-n+1} & \dots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est persymétrique, c'est-à-dire que ses coefficients sont symétriques par rapport à l'antidiagonale de la matrice et qu'elle vérifie par conséquent l'égalité

$$A = J_n A^T J_n,$$

où J_n est la matrice de permutation d'ordre n telle que

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Bareiss permet d'effectuer la résolution d'un système linéaire dont la matrice est de Toeplitz en la ramenant à celle d'un système triangulaire équivalent. Pour cela [1], elle construit, à partir de $A^{(0)} = A$, deux familles de matrices $(A^{(-k)})_{0 \leq k \leq n-1}$ et $(A^{(k)})_{0 \leq k \leq n-1}$, telles que la matrice $A^{(-k)}$ (resp. $A^{(k)}$), $1 \leq k \leq n-1$, a des éléments nuls sur les k premières diagonales situées au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale principale, les dernières (resp. premières) $n-k$ lignes de cette matrice formant une matrice rectangulaire ayant encore une structure de Toeplitz.

Pour obtenir $A^{(-k)}$ (resp. $A^{(k)}$), $1 \leq k \leq n-1$, on modifie seulement les lignes $k+1$ à n (resp. 1 à $n-k$) de la matrice $A^{(-k+1)}$ (resp. $A^{(k-1)}$), l'algorithme de la méthode prenant la forme : pour $k = 1, \dots, n-1$,

$$a_i^{(-k)} = a_i^{(-k+1)} - m^{(-k)}\, a_{i+k}^{(k-1)},\ m^{(-k)} = \frac{a_{-k}^{(-k+1)}}{a_0^{(k-1)}},\ i = -n+1, \dots, -k-1, 0, \dots, n-1-k, \quad (1)$$

$$a_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} - m^{(k)}\, a_{i-k}^{(-k+1)},\ m^{(k)} = \frac{a_k^{(k-1)}}{a_0^{(-k)}},\ i = -n+1+k, \dots, -1, k+1, \dots, n-1. \quad (2)$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que cette méthode fournit la factorisation LU d'une matrice de Toeplitz, à un coût moindre que celui reposant sur l'élimination de Gauss sans échange. Dans toute la suite, la matrice de Toeplitz A d'ordre n est supposée telle que *toutes* ses sous-matrices principales extraites sont inversibles.

1. On ne considère ici que les modifications de la matrice du système linéaire et pas celles du vecteur au second membre.

1. Effectuer le compte du nombre d'opérations arithmétiques (additions et soustractions, multiplications, divisions) que nécessite la méthode définie par (1) et (2).

On réinterprète respectivement (1) et (2) d'un point de vue matriciel par

$$A^{(-k)} = A^{(-k+1)} - m^{(-k)}\, Z^{(-k)} A^{(k-1)},\ A^{(k)} = A^{(k-1)} - m^{(k)}\, Z^{(k)} A^{(-k+1)},\ k = 1, \dots, n-1,$$

avec $Z^{(\pm k)}$ des matrices d'ordre n définies[2] par $z_{ij}^{(\pm k)} = \delta_{i\pm k,j}$, $1 \leq i, j \leq n$. On pose alors

$$A^{(\pm k)} = M^{(\pm k)} A,\ k = 1, \dots, n-1,$$

et $M^{(0)} = I_n$.

2. Donner les relations de récurrences satisfaites par les familles $(M^{(\pm k)})_{1\leq k\leq n-1}$. En déduire la structure des matrices $M^{(k)}$ et $M^{(-k)}$, $1 \leq k \leq n-1$. Que valent les coefficients diagonaux des matrices $M^{(-k)}$?
3. Déduire de la précédente question que $(M^{(-n+1)})^{-1} = L$ et $A^{(-n+1)} = U$, où les matrices L et U sont celles de la factorisation LU de A.

On observe enfin que les coefficients diagonaux de la matrice $A^{(n-1)}$ sont tous égaux à a_0.

4. Soit $\tilde{U}$ et $\tilde{L}$ les matrices de la factorisation UL[3] de A. Montrer que $\tilde{U} = a_0 (M^{(n-1)})^{-1}$ et $\tilde{L} = {a_0}^{-1} A^{(n-1)}$.
5. En utilisant la propriété de persymétrie et les deux factorisations de A introduites, montrer que $L = {a_0}^{-1} J_n A^{(n-1)} J_n$.

Exercice 2 (12 points). Soit un entier naturel $n > 1$. On considère la matrice d'ordre $n-1$

$$A_n = n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

issue de la discrétisation par différences finies de l'équation de Laplace, posée sur l'intervalle $[0, 1]$ et complétée par des conditions aux limites de Dirichlet.

On veut tout d'abord calculer les valeurs propres de la matrice A_n et, accessoirement, les vecteurs propres associés. Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A_n.

1. Montrer que les composantes de $\boldsymbol{v}$ vérifient la relation de récurrence

$$-v_{i+1} + \left(2 - \frac{\lambda}{n^2}\right) v_i - v_{i-1} = 0,\ 1 \leq i \leq n-1, \tag{3}$$

avec $v_0 = v_n = 0$.

2. En cherchant les solutions de (3) sous la forme $v_i = \sin(i\,\alpha)$, $0 \leq i \leq n$, avec α un nombre réel à déterminer, obtenir[4] que

$$\lambda_j = 4\,n^2 \left(\sin\left(\frac{j\,\pi}{2n}\right)\right)^2,\ (\boldsymbol{v_j})_i = \sin\left(ij\,\frac{\pi}{n}\right),\ i = 1, \dots, n-1,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

où le nombre réel λ_j désigne une valeur propre de A_n et le vecteur $\boldsymbol{v_j}$ est un vecteur propre associé à λ_j.

---

2. On remarquera que la multiplication par la gauche par $Z^{(k)}$ (resp. $Z^{(-k)}$), $1 \leq k \leq n-1$, d'une matrice d'ordre n décale les lignes de cette matrice de k positions vers le haut (resp. le bas).

3. Cela signifie que l'on a $A = \tilde{U}\tilde{L}$, avec $\tilde{U}$ une matrice triangulaire supérieure et $\tilde{L}$ une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Cette décomposition de la matrice A existe et est unique sous les mêmes conditions que pour la factorisation LU.

4. On rappelle les formules de trigonométrie suivantes : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$ et $\cos(2a) = 1 - 2(\sin(a))^2$.

3. En déduire que la matrice A_n est inversible.

On se propose à présent de comparer des méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire ayant A_n pour matrice. On note $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations de la solution $\boldsymbol{x}$ construites par la méthode considérée et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}$ l'erreur de cette méthode à l'itération k.

4. Déterminer les valeurs propres de la matrice d'itération B_J de la méthode de Jacobi à partir de celles de A_n et trouver que $\rho(B_J) = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, où $\rho(B_J)$ est le rayon spectral de B_J. En déduire que cette méthode est convergente.

5. La matrice B_J étant ici symétrique, on a la relation
$$\|\boldsymbol{e}^{(k)}\|_2 \leq \rho(B_J)^k \|\boldsymbol{e}^{(0)}\|_2,\ \forall k \geq 0.$$
En supposant pour simplifier que $\|\boldsymbol{e}^{(0)}\|_2 = 1$ et en utilisant un développement limité [5] de $\rho(B_J)$, obtenir (en fonction de n) un minorant approché du nombre minimal d'itérations k_0 à effectuer pour avoir
$$\|\boldsymbol{e}^{(k)}\|_2 \leq \varepsilon,\ \forall k \geq k_0, \tag{4}$$
avec ε une tolérance fixée.

6. En utilisant les résultats de la question 4 et du cours, déterminer le rayon spectral de la matrice d'itération B_{GS} de la méthode de Gauss–Seidel et en déduire que cette méthode est convergente. Reprendre ensuite la précédente question pour cette méthode.

7. En utilisant les résultats de la question 2 et du cours, donner une condition nécessaire et suffisante sur la valeur du paramètre de relaxation ω de la méthode de sur-relaxation successive (SOR) pour que cette dernière méthode soit convergente.

8. La matrice A_n étant tridiagonale symétrique définie positive, la valeur optimale ω_0 du paramètre de la méthode SOR vaut
$$\omega_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_j)^2}} = \frac{2}{1+\sin(\frac{\pi}{n})}$$
et on a alors $\rho(B_{SOR}(\omega_0)) = \omega_0 - 1$. Déterminer [6] un minorant (en fonction de n) approché du nombre minimal d'itérations k_0 à effectuer avec cette méthode pour avoir (4).

9. On choisit $n = 100$ et $\varepsilon = 10^{-4}$. En utilisant que $\pi \approx 3,14$ et $\ln(\varepsilon) \approx -11,5$, calculer des valeurs approchées de l'entier k_0 pour chacunes des trois méthodes considérées plus haut.

5. On rappelle que, au voisinage de 0, on a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ et $\ln(1-x) = -x + O(x^2)$.

6. On rappelle que, au voisinage de 0, on a $\sin(x) = x + O(x^3)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$.