

EXERCICE 1

1- Pour chaque valeur de l'entier k , la relation de récurrence (1) induit $-k-1 - (-n+1)+1+n-1-k+1=2n-2k-1$ multiplications et soustractions et une division. La relation (2) induit $-1 - (n-1+k)+1+n-1-(k+1)+1=2(n-k-1)$ multiplications et soustractions et une division. L'entier k variant de 1 à $n-1$, le nombre d'opérations nécessaire est donc de $4 \sum_{k=1}^{n-1} n - 4 \sum_{k=1}^{n-1} k - 3 \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 4n(n-1) - 4 \frac{n(n-1)}{2} - 3(n-1)$
 $= 2n^2 - 5n + 3$ multiplications et soustractions et $2(n-1)$ divisions.

2- En posant $A^{(\pm k)} = M^{(\pm k)} A$, on obtient à partir des

(1) relations données dans l'énoncé:

$$M^{(-k)} A = M^{(-k+1)} A - m^{(-k)} Z^{(-k)} M^{(k-1)} A$$

et $M^{(k)} A = M^{(k-1)} A - m^{(k)} Z^{(k)} M^{(-k)} A$ d'où, après

multiplication à droite par A^{-1} (qui est inversible d'après l'hypothèse de l'énoncé),

$$M^{(-k)} = M^{(-k+1)} - m^{(-k)} Z^{(-k)} M^{(k-1)} \text{ et } M^{(k)} = M^{(k-1)} - m^{(k)} Z^{(k)} M^{(-k)}$$

avec $M^{(0)} = I_n$.

La suite de matrices $(M^{(-k)})_{0 \leq k \leq n-1}$ (resp. $(M^{(k)})_{0 \leq k \leq n-1}$) est telle que la matrice $M^{(-k)}$ (resp. $M^{(k)}$) possède des coefficients non nuls seulement sur la diagonale principale et sur les k premières sous-diagonales (resp. sur diagonales), $k=1, \dots, n-1$. On le montre par récurrence. Pour $k=1$, on a

$M^{(-1)} = I_n - m^{(-1)} Z^{(-1)}$, qui est bien une matrice dont seules la diagonale et la première sous-diagonale possèdent des coefficients non nuls (valant tous 1 pour la diagonale et tous $-m^{(-1)}$ pour la sous-diagonale). On a aussi

$M^{(1)} = I_n - m^{(1)} Z^{(1)} M^{(-1)}$. Compte tenu de la forme de la matrice $Z^{(1)}$ et de celle de la matrice $M^{(-1)}$, on a que la matrice $Z^{(1)} M^{(-1)}$ ne possède des éléments non nuls que

sur la diagonale principale et sur la première sur-diagonale. $M^{(1)}$ est donc bien de la forme voulue.

Pour $k \geq 1$, la matrice $M^{(-k+1)}$ (resp. $M^{(k-1)}$) possède des coefficients non nuls seulement sur la diagonale principale et sur les $k-1$ premières sous-diagonales (resp. sur-diagonales).

Par conséquent, le produit $Z^{(-k)} M^{(k-1)}$ possède des coefficients non nuls seulement sur les k premières sous-diagonales et la matrice $M^{(-k)}$ donnée par la formule de récurrence possède bien des éléments non nuls seulement sur la diagonale et les k premières sous-diagonales. Par suite, la matrice $Z^{(k)} M^{(-k)}$

possède des coef. non nuls seulement sur la diagonale et les k premières sur-diagonales, c'est donc aussi le cas pour $M^{(k)}$.

Dans la construction ci-dessus, on observe que les matrices $Z^{(-k)} M^{(k-1)}$ sont toujours triangulaires inférieures strictes et la diagonale des matrices $M^{(-k)}$, $k=0, \dots, n-1$, est donc toujours la même. Les coefficients diagonaux valent donc 1.

3. On déduit donc de la question précédente que $M^{(-n+1)}$ est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux valent 1. La matrice $A^{(-n+1)}$ est triangulaire supérieure et on a par ailleurs $M^{(-n+1)} A = A^{(-n+1)}$ d'où $A = (M^{(-n+1)})^{-1} A^{(-n+1)}$. On trouve alors, par définition et unicité (par hypothèse sur A) de la factorisation LU que $L = (M^{(-n+1)})^{-1}$ et $U = A^{(-n+1)}$.

4. De la même manière, $A^{(n-1)}$ est une matrice triangulaire inférieure de coeff. diagonaux valant a_0 , donc $a_0^{-1} A^{(n-1)}$ est triangulaire inférieure avec coeff. diagonaux valant 1. De plus, $M^{(n-1)}$ est triangulaire supérieure et on a $M^{(n-1)} A = A^{(n-1)}$ d'où $A = a_0 (M^{(n-1)})^{-1} a_0^{-1} A^{(n-1)}$.

(Note : on ne demande pas de montrer que $M^{(n-1)}$ est inversible) et donc $\tilde{U} = a_0 (M^{(n-1)})^{-1}$ et $\tilde{L} = a_0^{-1} A^{(n-1)}$.

5- On $A = LU = \tilde{U} \tilde{L}$ et $A = J_n A^T J_n$ avec $J_n J_n = I_n$
 d'où $LU = J_n (\tilde{U} \tilde{L})^T J_n = J_n \tilde{L}^T \tilde{U}^T J_n = J_n \tilde{L}^T J_n J_n \tilde{U}^T J_n$

En identifiant les matrices triangulaires dans le produit, on obtient $L = J_n \tilde{L}^T J_n$, d'où $L = a_0^{-1} J_n A^{(n-1)} J_n$.

EXERCICE 2

1- En effectuant le produit de A_n avec le vecteur v de composantes v_i , $i=1, \dots, n-1$, on obtient le vecteur de composantes :

$$\begin{aligned} 2n^2 v_1 &= n^2 v_2 & \text{pour } i=1 \\ -n^2 v_{i+1} + 2n^2 v_i - n^2 v_{i-1} & & \text{pour } 2 \leq i \leq n-2 \\ 2n^2 v_n &= n^2 v_{n-1} & \text{pour } i=n-1 \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire $-n^2 v_{i+1} + 2n^2 v_i - n^2 v_{i-1}$
 en posant $v_0 = v_n = 0$. $1 \leq i \leq n-1$

On en déduit la récurrence demandée en utilisant que $n^2 \neq 0$

2- En utilisant l'ansatz donné dans l'énoncé et les formules de trigonométrie, on trouve que

$$\left(2 - \frac{\lambda}{n^2} - 2 \cos(\alpha)\right) \sin(i\alpha) = 0 \quad 1 \leq i \leq n-1$$

En particulier, pour $i=1$, $\left(2 - 2 \cos(\alpha) - \frac{\lambda}{n^2}\right) \sin(\alpha) = 0$
 et $\alpha \neq 0$ (sinon v est le vecteur nul). On en déduit que

$$\lambda = 2n^2 (1 - \cos(\alpha)) = 4n^2 \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2.$$

Par ailleurs, la condition $v_n = 0$ impose que $\sin(n\alpha) = 0$,
 on a donc $n-1$ choix possibles pour α (chacun correspondant à l'une des valeurs propres de A_n), $\alpha = j \frac{\pi}{n}$, $1 \leq j \leq n$
 d'où $\lambda_j = 4n^2 \left(\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\right)^2$ et $(v_j)_i = \sin\left(i \frac{j\pi}{n}\right)$
 $1 \leq j \leq n-1$.

3- Les valeurs propres de A_n sont toutes strictement positives, la matrice est donc inversible.

4- On a $B_J = M^{-1}N$ avec $M = 2n^2 I_{n-1}$ et $N = 2n^2 I_{n-1} - A_n$
 d'où $B_J = I_{n-1} - \frac{1}{2n^2} A_n$ Les valeurs propres de B_J sont
 donc $1 - \frac{\lambda_j}{2n}$, où les réels λ_j sont les valeurs propres de
 A_n . On a donc

$$\rho(B_J) = \max_{1 \leq j \leq n-1} |\cos(j \frac{\pi}{n})| = \max_{j \in \{1, n-1\}} |\cos(j \frac{\pi}{n})| = \cos(\frac{\pi}{n})$$

On a $\rho(B_J) < 1$ et la méthode est donc convergente.

5- $\|e^{(0)}\|_2 = 1$, on veut donc avoir $\|e^{(k)}\|_2 \leq \rho(B_J)^k \leq \epsilon$
 d'où $k \ln(\rho(B_J)) \leq \ln(\epsilon)$

$$\Rightarrow k \geq \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(\rho(B_J))}$$

on a $\rho(B_J) = \cos(\frac{\pi}{n}) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^4})$

et $\ln(\rho(B_J)) = -\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^4})$ d'où $k_0 \sim -\frac{2 \ln(\epsilon)}{\pi^2} n^2$

6- La matrice A_n étant tridiagonale, on sait

d'après le cor. que les rayons spectraux des matrices
 d'itération des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont
 liés par la relation : $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)$, de sorte
 que les méthodes convergent ou divergent simultanément.

On en déduit dans ce cas que $k_0 \sim -\frac{2 \ln(\epsilon)}{\pi^2} n^2$.

7- La matrice A_n est symétrique et définie positive (d'après
 la question 2), on sait que la CNS demandée est
 $\omega \in]0, 2[$.

8- On a $\omega_0 = 2(1 - \frac{\pi^2}{n^2}) + o(\frac{1}{n^2})$ d'où $\rho(B_{SOR}(\omega_0)) = 1 - \frac{2\pi^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$
 d'où $k_0 \sim -\frac{\ln(\epsilon)}{2\pi^2} n^2$

3- On a $\pi \approx 3,14$, $\ln(\epsilon) \approx -11,5$ et $n = 100$

d'où

Jacobi	$\frac{2 \times 11,5}{(3,14)^2} \times 100^2 \approx 43348$ itérations
Gauss-Seidel	$\frac{11,5}{(3,14)^2} \times 100^2 \approx 11674$ itérations
SOR	$\frac{11,5}{2 \times 3,14^2} \times 100^2 \approx 184$ itérations