

EXERCICE 1 (ALGORITHME DE BJORCK-PEREYRA)

1. La matrice V est celle du système linéaire, ayant pour second membre le vecteur de composantes $y_i, i=0, \dots, n$, et pour solution les réels $a_i, i=0, \dots, n$, coefficients du polynôme d'interpolation Π_n dans la base canonique de l'anneau des polynômes.

2. La forme de Newton de Π_n s'écrit

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^n [x_0, \dots, x_k]_y \omega_k(x)$$

où $[x_0, \dots, x_k]_y$ désigne la k -ième différence divisée de Newton associée aux couples $(x_i, y_i), i=0, \dots, n$, $k=0, \dots, n$, et ω_k est le k -ième polynôme de Newton défini par $\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i), k=1, \dots, n$, et $\omega_0(x) = 1$.

3. Pour le calcul des différences divisées apparaissant dans la forme de Newton, on a besoin de calculer les différences divisées du tableau suivant :

$$[x_0]_y (= y_0)$$

$$[x_1]_y (= y_1) \quad [x_0, x_1]_y$$

$$[x_n]_y (= y_n)$$

$$[x_{n-1}, x_n]_y$$

$$[x_0, \dots, x_{n-1}]_y$$

$$[x_1, \dots, x_n]_y \quad [x_0, \dots, x_n]_y$$

par l'algorithme donné dans l'énoncé, ce qui demande d'effectuer $(n+1)n$ soustractions et $\frac{1}{2}(n+1)n$ divisions.

4. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^n C_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

$$= \left(\left(\left(C_n (x - x_n) + C_{n-1} \right) (x - x_{n-2}) + \dots \right) (x - x_2) + \dots \right) (x - x_0) + C_0$$

$$p^{(0)}(x)$$

$$p^{(1)}(x)$$

$$p^{(2)}(x)$$

$$p^{(n)}(x)$$

$$p^{(k)}(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}x + \dots + a_k^{(k)}x^k$$
 et

$$p^{(k-1)}(x) = a_0^{(k-1)} + a_1^{(k-1)}x + \dots + a_{k-1}^{(k-1)}x^{k-1}$$
 ainsi que

$$p^{(k)}(x) = c_{n-k} + (x - x_{n-k}) p^{(k-1)}(x)$$

En identifiant les coefficients des termes de même degré, il vient

$$k=0, \dots, n \quad \begin{cases} a_0^{(k)} = c_{n-k} - x_{n-k} a_0^{(k-1)} \\ a_i^{(k)} = a_{i-1}^{(k-1)} - x_{n-k} a_i^{(k-1)} \quad i=1, \dots, k-1 \\ a_k^{(k)} = a_{k-1}^{(k-1)} \end{cases}$$

On peut donc obtenir les coefficients de T_n dans la base canonique à partir des différences divisées de sa forme de Newton en appliquant l'algorithme ci-dessus pour $k=0, \dots, n$. Le coût est de $\frac{n(n+1)+2}{2}$ soustractions et autant multiplications.

5. L'algorithme est le suivant : (on écrase les valeurs des données $y_i, i=0, \dots, n$, en entrée avec la solution du système $Y_n = y$)

```

pour k=0 à n-1
  pour i=n à k+1
     $y_i = (y_i - y_{i-1}) / (x_i - x_{i-k-1})$  // calcul des diff.
                                     // divisées de la forme
                                     // de Newton de  $T_n$ 
  fin
fin

```

```

pour k=n-1 à 0
  pour i=k à n-1
     $y_i = y_i - y_{i+1} x_k$  // calcul des coeff. de  $T_n$  dans
                           // la base canonique
  fin
fin

```

Son coût est d'environ $\frac{5}{2} n^2$ opérations, ce qui est avantageux comparé aux $O(n^3)$ opérations d'une méthode directe.

De plus, il n'est pas nécessaire de stocker la matrice puisqu'on a seulement besoin des valeurs $x_i, i=0, \dots, n$ et $y_i, i=0, \dots, n$.

EXERCICE 2 (METHODE DE NEWTON-SCHULZ)

1. a. Considérons la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x} - a$. Elle est continue et dérivable pour tout $x \neq 0$ et on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

La méthode de Newton-Raphson est basée sur la relation de récurrence $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$, $k \geq 0$, $x^{(0)}$ donné

et donc $x^{(k+1)} = x^{(k)} + (x^{(k)})^2 \left(\frac{1}{x^{(k)}} - a \right) = 2x^{(k)} - a(x^{(k)})^2 = x^{(k)}(2 - ax^{(k)})$

b. On sait que la méthode converge si l'initialisation est suffisamment proche de $\frac{1}{a}$. Déterminons ce voisinage.

Posons $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$. On a $\varphi(x) = 2(1 - ax)$

d'où le tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{a}$	$\frac{2}{a}$
φ'	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{a}$	$-\infty$

On a $\varphi(0) = 0$ et

$\varphi(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$: l'intervalle

$]0, \frac{1}{a}[$ est donc

stable par φ et de

plus $\varphi([\frac{1}{a}, \frac{2}{a}[) =]0, \frac{1}{a}[$

- si $x^{(0)} \in]0, \frac{1}{a}[$, alors $x^{(k+1)} \geq x^{(k)}$ $\forall k \geq 0$ et la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $\frac{1}{a}$ donc convergente.

Notons l sa limite, on a $l = l(2 - al)$ et, comme $l \geq x^{(0)} > 0$,

il vient $l = \frac{1}{a}$

- si $x^{(0)} \in]\frac{1}{a}, \frac{2}{a}[$, alors $x^{(1)} \in]0, \frac{1}{a}[$ et on se ramène au cas précédent.

- si $x^{(0)} \in]-\infty, 0[$, la suite est décroissante et admet une limite, finie ou infinie, notée l , vérifiant $l = l(2 - al)$. Si l est finie $l = 0$, car la valeur $l = \frac{1}{a}$ est strictement positive. Or $l \leq x^{(0)} < 0$, d'où $l = -\infty$.

- si $x^{(0)} \in]\frac{2}{a}, +\infty[$, alors $x^{(1)} \in]-\infty, 0[$ et on est ramené au cas précédent.

2 - a - $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert car c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application continue qui à une matrice associe son déterminant.

b - On a $DT(X^{(k)}) (X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -T(X^{(k)})$

d'où $-(X^{(k)})^{-1} (X^{(k+1)} - X^{(k)}) (X^{(k)})^{-1} = -(X^{(k)})^{-1} + A$

$\Leftrightarrow -(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -X^{(k)} + X^{(k)} A X^{(k)}$

$\Leftrightarrow X^{(k+1)} = 2X^{(k)} - X^{(k)} A X^{(k)}$

c - D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} I_n - A X^{(k+1)} &= I_n - A (2X^{(k)} - X^{(k)} A X^{(k)}) \\ &= I_n - 2A X^{(k)} + A X^{(k)} A X^{(k)} \end{aligned}$$

et comme les matrices I_n et $A X^{(k)}$ commutent

$$I_n - A X^{(k+1)} = (I_n - A X^{(k)})^2$$

Par une récurrence immédiate, il vient

$$I_n - A X^{(k)} = (I_n - A X^{(0)})^{2^k} \quad k \geq 0.$$

On a donc $I_n - A X^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ si $\rho(I_n - A X^{(0)}) < 1$

EXERCICE 3 (RÈGLE DU TRAPÈZE ET FONCTIONS CONVEXES)

1 - On a par définition $\Pi_1 f(x) = f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x)$

où $x_0 = a$, $x_1 = b$, $l_0(x) = \frac{x-b}{a-b}$ et $l_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

On remarque que, $\forall x \in [a, b]$, $0 \leq \frac{x-b}{a-b} \leq 1$

et que $1 - \frac{x-b}{a-b} = \frac{x-a}{b-a}$. De plus, $\frac{x-b}{a-b} a + \frac{x-a}{b-a} b = x$

En posant $t = \frac{x-b}{a-b}$ et le fait que $f(ta + (1-t)b) \leq f(a)t + (1-t)f(b)$,

on obtient donc que $f(x) \leq \Pi_1 f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

2 - La règle du trapèze est basée sur le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux extrémités de l'intervalle d'intégration c'est-à-dire $\Pi_1 f$. Considérons la règle du trapèze composée à

m sous-intervalles de même longueur. Posons $[a, b] = \bigcup_{j=0}^{m-1} [x_j, x_{j+1}]$

et notons $\Pi_1^{(j)} f$ le polynôme de Lagrange associé à x_j et x_{j+1}

On $\forall x \in [x_j, x_{j+1}] \subset [a, b]$, on a $f(x) \leq \Pi_1^{(j)} f(x)$, $j = 0, \dots, m-1$

on a par conséquent $\sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \leq \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \Pi_1^{(j)} f(x) dx$

d'où $\mathbb{E}(f) \leq \mathbb{I}_{m,1}(f)$

3- $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \left[\ln(x) \right]_{x=1}^2 = \ln(2)$

et $\mathbb{I}_{2,1}(f) = \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f(b) \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{24}$

4- On a $|\mathbb{E}_{m,1}(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{12m^2} |f''(\xi)|$ avec $b-a=1$

et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, d'où $\max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| = 2$, il vient

donc on veut $\frac{1}{6m^2} \leq 10^{-8}$ d'où $m \geq \frac{10^4}{\sqrt{6}} \approx 4083$