Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

Examen du 16 juin 2014

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (algorithme de Björk–Pereyra). Étant donné $n+1$ réels distincts $x_0, \dots, x_n$, $n \geq 0$, la matrice de Vandermonde V associée à ces réels est la matrice d'ordre $n+1$ de la forme

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & \dots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & {x_n}^n \end{pmatrix}.$$

Les matrices de ce type sont notoirement mal conditionnées, ce qui pose problème pour la résolution numérique des systèmes linéaires de Vandermonde par des méthodes directes, les solutions calculées étant entâchées d'importantes erreurs. On se propose dans cet exercice de retrouver une méthode de résolution alternative, à la fois peu affectée par le mauvais conditionnement et plus efficace qu'une méthode directe.

1. Quel est le lien entre la matrice de Vandermonde V et le polynôme d'interpolation de Lagrange Π_n associé aux nœuds $x_0, \dots, x_n$ et à des valeurs $y_0, \dots, y_n$ (on précisera quelle représentation du polynôme est utilisée) ?
2. Rappeler la forme de Newton de Π_n.
3. Pour $k = 0, \dots, n$, $i = k, \dots, n$, on pose $c_i^{(k)} = [x_{i-k}, \dots, x_i]\boldsymbol{y}$. Sachant que $c_i^{(0)} = [x_i]\boldsymbol{y} = y_i$, $i = 0, \dots, n$, on rappelle que le calcul des différences divisées se fait selon la formule de récurrence

$$c_i^{(k)} = \frac{c_i^{(k-1)} - c_{i-1}^{(k-1)}}{x_i - x_{i-k}},\ k = 1, \dots, n,\ i = k, \dots, n.$$

   En notant que $[x_0, \dots, x_k]\boldsymbol{y} = c_k^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$, donner le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires au calcul de toutes les différences divisées apparaissant dans la forme de Newton de Π_n à partir de la donnée des couples (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$.
4. On introduit la famille de polynômes $p^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$, définie par

$$p^{(0)}(x) = c_n^{(n)},\ p^{(k)}(x) = c_{n-k}^{(n-k)} + (x - x_{n-k})p^{(k-1)}(x),\ k = 1, \dots, n.$$

   a. Montrer que $p^{(n)} = \Pi_n$.

   b. En écrivant que $p^{(k)}(x) = a_0^{(k)} + \dots + a_k^{(k)} x^k$, $k = 0, \dots, n$, montrer que les coefficients $a_i^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$, $i = 0, \dots, k$, sont donnés par les relations de récurrence

$$a_0^{(k)} = c_{n-k}^{(n-k)} - x_{n-k}a_0^{(k-1)},\quad a_i^{(k)} = a_{i-1}^{(k-1)} - x_{n-k}a_i^{(k-1)},\ i = 1, \dots, k-1,$$
$$a_k^{(k)} = a_{k-1}^{(k-1)},\ k = 1, \dots, n.$$

   c. En déduire un procédé de calcul des coefficients de Π_n dans la base canonique à partir de la donnée des différences divisées de la forme de Newton de ce même polynôme et indiquer son coût en termes d'opérations arithmétiques.

5. Proposer un algorithme pour la résolution du système linéaire $V\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}$ utilisant la forme de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange. Comment son coût en termes d'opérations arithmétiques se compare-t-il à celui d'une méthode directe et que dire du stockage de la matrice V ?

Exercice 2 (méthode de Newton–Schulz).

1. Soit un réel a strictement positif. On cherche dans cette partie à calculer $\frac{1}{a}$ au moyen de la méthode de Newton–Raphson.
   a. Montrer que la méthode de Newton–Raphson, appliquée à une fonction f que l'on précisera (et dont $\frac{1}{a}$ est un zéro), s'écrit
   $$x^{(0)} \text{ donné, } x^{(k+1)} = x^{(k)}\big(2 - a\,x^{(k)}\big),\ k \geq 0.$$
   b. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie vérifie
   $$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x^{(0)} \in \left]0, \frac{2}{a}\right[, \\ -\infty & \text{si } x^{(0)} \in]-\infty, 0[\cup \left]\frac{2}{a}, +\infty\right[. \end{cases}$$
2. On cherche maintenant à calculer l'inverse d'une matrice réelle par la méthode de Newton–Raphson.
   a. **(question facultative, hors barème)** Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles inversibles d'ordre n (dit groupe général linéaire) est un ouvert de l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles d'ordre n.

   Soit T l'application définie de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ par $T(X) = X^{-1}$. On admet que T est dérivable et que sa différentielle en X est donnée par $DT(X)H = -X^{-1}HX^{-1}$.

   b. Soit A une matrice d'ordre $n \geq 1$ inversible. Donner[1] la relation de récurrence satisfaite par la suite de matrices $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue par application de la méthode de Newton–Raphson à la recherche du zéro de la fonction f de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(X) = X^{-1} - A$.
   c. Montrer enfin que la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie
   $$I_n - AX^{(k+1)} = (I_n - AX^{(k)})^2,\ k \geq 0.$$
   En déduire que cette suite converge vers A^{-1} si et seulement si $\rho(I_n - AX^{(0)}) < 1$.

Exercice 3 (règle du trapèze pour l'intégrale d'une fonction convexe). On souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale
$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
où $[a,b]$ est un intervalle borné et non vide de $\mathbb{R}$ et f est une fonction continue et convexe sur $[a,b]$.

1. Montrer[2] que l'on a dans ce cas $f(x) \leq \Pi_1 f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, où $\Pi_1 f$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f associé aux nœuds $x_0 = a$ et $x_1 = b$.
2. En se servant de cette observation, expliquer pourquoi la règle du trapèze composée fournira toujours, c'est-à-dire quel que soit le nombre de sous-intervalles utilisés pour subdiviser $[a,b]$, une approximation par excès de la valeur de l'intégrale $I(f)$.
3. On choisit $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = 2$. Trouver une approximation de $\ln(2)$ en appliquant la règle du trapèze composée à deux sous-intervalles au calcul approché de $I(f)$.
4. Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$, on rappelle que l'erreur de quadrature de la règle du trapèze composée à m sous-intervalles a pour expression $E_{m,1}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12\,m^2} f''(\xi)$, avec $\xi \in]a,b[$. Donner une estimation du nombre de sous-intervalles à utiliser pour obtenir une erreur absolue inférieure ou égale à 10^{-8} pour les choix de la question précédente.

---

1. On remarquera que, par définition de la méthode, la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est construite par la relation
$$Df(X^{(k)})\big(X^{(k+1)} - X^{(k)}\big) = -f(X^{(k)}),\ k \geq 0.$$

2. On rappelle que la fonction f vérifie notamment
$$f(ta + (1-t)b) \leq t\,f(a) + (1-t)\,f(b),\ \forall t \in [0,1].$$