Examen d'appel du 1^er^ septembre 2014

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (méthode de point fixe). Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x^2} - 4\,x^2$.

1. Situer les zéros de f en donnant quatre intervalles disjoints contenant chacun un et un seul zéro. Montrer qu'un de ces zéros, que l'on notera ξ, est compris entre 0 et 1.
2. On veut approcher ξ par la méthode de point fixe de fonction $g(x) = \frac{1}{2}\,e^{\frac{x^2}{2}}$ et d'initialisation $x^{(0)} \in]0,1[$. Étudier la convergence de cette méthode, en donnant le cas échéant son ordre.

Exercice 2 (méthode du gradient à pas constant). On cherche à résoudre le système linéaire $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, où A est une matrice symétrique, définie positive d'ordre n et $\boldsymbol{b}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, tous deux donnés, par une méthode itérative dite de gradient à pas constant. Celle-ci s'appuie sur la relation de récurrence suivante

$$\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{b} - A\,\boldsymbol{x}^{(k)},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\,\boldsymbol{r}^{(k)},\ k \geq 0,\ ,$$

avec α est un réel constant, l'initialisation $\boldsymbol{x}^{(0)}$ étant arbitrairement choisie.

1. On note $\mathbf{e}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}$, $k \geq 0$, l'erreur de la méthode à l'étape k. Montrer que
$$\mathbf{e}^{(k)} = (I_n - \alpha\,A)^k\,\mathbf{e}^{(0)}, k \geq 0.$$
2. Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A. Montrer que la méthode converge si et seulement si $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$.
3. En observant que la plus grande des valeurs absolues $|1 - \alpha\,\lambda_i|$, $i = 1, \ldots, n$ est donnée soit par $|1 - \alpha\,\lambda_1|$, soit par $|1 - \alpha\,\lambda_n|$, montrer que le meilleur choix pour le réel α en termes de vitesse de convergence de la méthode est
$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_n + \lambda_1}.$$
Quelle est alors la valeur du rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode ?

Problème (phénomène de Runge). L'objectif de ce problème est de montrer, en se servant d'un contre-exemple dû à Runge, qu'il n'y a généralement pas de convergence simple de la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange d'une fonction associés à des points équidistribués lorsque le nombre de points d'interpolation tend vers l'infini.

Note : les questions principales du problème peuvent être traitées de manière indépendante en admettant les résultats des questions qui les précèdent. Il n'y a, à aucun moment, besoin d'expliciter le polynôme d'interpolation considéré.

1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et g une fonction à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. On rappelle que l'erreur de quadrature de la règle du point milieu est donnée par
$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24}\,g''(\eta),\ \eta \in]a, b[.$$
En faisant appel à la règle du point milieu composée à m sous-intervalles de longueurs égales, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que
$$\left|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{(b-a)}{m}\sum_{k=1}^{m} g\left(a + (b-a)\frac{2k-1}{2m}\right)\right| \leq \frac{M}{24}\,\frac{(b-a)^3}{m^2}.$$

On considère à présent la fonction $f(x) = \frac{1}{\lambda^2+x^2}$, λ étant un réel strictement positif, sur l'intervalle $[-1,+1]$ et un entier naturel n impair, c'est-à-dire que $n = 2m-1$, $m \in \mathbb{N}^*$. On définit les nœuds $x_k = \frac{2k+1}{2m} - 1$, $0 \leq k \leq 2m-1$, et on note alors $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé à ces points.

2. On va tout d'abord établir une expression pour l'erreur d'interpolation de la fonction f. Pour cela, on introduit la fonction polynomiale $q(x) = 1 - (\lambda^2 + x^2)\,\Pi_n f(x)$.
   a. Établir, en utilisant les propriétés du polynôme d'interpolation de Lagrange, que
   $$q(x) = (\alpha\, x - \beta) \prod_{k=0}^{2m-1} (x - x_k),$$
   où α et β sont des réels que l'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.
   b. Montrer ensuite que $x_{2m-k-1} = -x_k$, $0 \leq k \leq 2m-1$, et en déduire que $\prod_{k=0}^{2m-1}(x - x_k) = \prod_{k=0}^{m-1}(x^2 - {x_k}^2)$.
   c. En remarquant que $q(\mathrm{i}\lambda) = q(-\mathrm{i}\lambda) = 1$, où $\mathrm{i}^2 = -1$, obtenir alors que
   $$q(x) = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{x^2 - {x_k}^2}{-\lambda^2 - {x_k}^2}.$$
   d. Établir enfin la formule suivante pour l'erreur d'interpolation en tout point x de l'intervalle $[-1,1]$,
   $$f(x) - \Pi_n f(x) = (-1)^m f(x) \prod_{k=0}^{m-1} \frac{x^2 - {x_k}^2}{\lambda^2 + {x_k}^2}.$$
3. On veut dans cette pénultième question obtenir à partir de l'expression ci-dessus un équivalent asymptotique de l'erreur au point $x = 1$ quand l'entier n, ou, de manière équivalente, l'entier m, tend vers l'infini.
   a. Montrer[1] que
   $$\prod_{k=0}^{m-1}(1 - {x_k}^2) = \frac{1}{(2m)^{2m}} \prod_{j=1}^{2m}(2j-1) = \frac{(4m)!}{(4m)^{2m}(2m)!},$$
   puis obtenir, en utilisant la formule de Stirling[2], l'équivalent asymptotique
   $$\prod_{k=0}^{m-1}(1 - {x_k}^2) \underset{m\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^{2m}.$$
   b. En posant $a = -1$, $b = 0$ et $g(x) = \ln(\lambda^2 + x^2)$, montrer à l'aide de la première question que[3]
   $$\prod_{k=0}^{m-1}(\lambda^2 + {x_k}^2) \underset{m\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{e^{1-\lambda\,\arctan\left(\frac{1}{\lambda}\right)}}\right)^{2m}.$$
   c. En déduire un équivalent asymptotique de $|f(1) - \Pi_n f(1)|$ lorsque m tend vers l'infini.
4. Déduire de la question précédente que, pour λ suffisamment petit, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \Pi_n f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)| = +\infty.$$

1. On fera le changement de variable $j = 2m - k$ et on utilisera que $\prod_{j=1}^{2m}(2j-1)\prod_{j=1}^{2m}(2j) = (4m)!$.
2. On rappelle que cette formule donne un équivalent de la factorielle d'un entier naturel n quand n tend vers l'infini et s'écrit $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
3. On notera que
$$\int_{-1}^{0} \ln(\lambda^2 + x^2)\,\mathrm{d}x = \ln(\lambda^2+1) - 2 + 2\lambda\,\arctan\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$