Méthodes itératives

MR. BEY Mohamed-Amine

DAUPHINE
UNIVERSITÉ PARIS

Jacobi

$C = D$ et $\alpha = 1$

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)$$

$$Dx^{k+1} = b - (A - D)x^k$$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j \neq i} A_{i,j}x_j^k$$

Gauss Seidel $A = D - E - F$

$C = D - E$ et $\alpha = 1$

$$x^{k+1} = x^k + (D - E)^{-1}(b - Ax^k)$$

$$(D - E)x^{k+1} = b + Fx^k$$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k$$

SOR $A = D - E - F$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$\begin{cases} A_{i,i}\tilde{x}_i^{k+1} = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k \\ x_i^{k+1} = \omega\tilde{x}_i^{k+1} + (1-\omega)x_i^k \end{cases}$$

Vérification de $C = \frac{D}{\omega} - E$.

$$A_{i,i}\Big(\frac{x_i^{k+1}}{\omega} - \frac{(1-\omega)}{\omega}x_i^k\Big) = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k$$

$$(\frac{D}{\omega} - E)x^{k+1} = b - \Big(-F - \frac{(1-\omega)}{\omega}D\Big)x^k = (\frac{D}{\omega} - E)x^k + (b - Ax^k)$$

Convergence de Gauss Seidel

Si A est une matrice SDP, alors $\rho\Big(I-(D-E)^{-1}A\Big)<1$ et la méthode de Gauss Seidel converge

On va montrer que pour tous A SDP et M inversible telle que $\Big(M^t+M-A\Big)$ SDP alors

$$\rho(I-M^{-1}A)<1$$

Preuve: on considère la norme sur $\mathbb{R}^n$ $\|x\|_\star^2=(Ax,x)$ et on va montrer que

$$\|I-M^{-1}A\|_\star^2=\sup_{x\neq 0}\frac{\|(I-M^{-1}A)x\|_\star^2}{\|x\|_\star^2}<1$$

Soit $x\neq 0$, on définit $y\neq 0$ tel que $Ax=My$

$$\begin{aligned}\|(I-M^{-1}A)x\|_\star^2&=(A(x-y),(x-y))\\&=\|x\|_\star^2+(Ay,y)-2(Ax,y)\\&=\|x\|_\star^2+(Ay,y)-2(My,y)\\&=\|x\|_\star^2-((M^t+M-A)y,y)<\|x\|_\star^2\end{aligned}$$

On conclut pour Gauss Seidel avec
$M^t+M-A=D-E+D-F-D+E+F=D>0$

Méthode de Richardson

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ solution de

$$Ax = b.$$

Méthode de Richardson: soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on construit une suite de solution x^k de la forme

$$x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k).$$

On a donc

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha A)(x^k - x),$$

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha A)^k(x^1 - x),$$

$$B = (I - \alpha A)$$

- Convergence: ssi $\rho(B) < 1$
- Taux de convergence: $\|B^k\|^{1/k} \to \rho(I - \alpha A)$

Méthode de Richardon pour les matrices SDP

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ SDP (Symétrique Définie Positive) et $\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$ ses valeurs propres par ordre croissant

$$\rho(I - \alpha A) = max\Big(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|\Big)$$

$$\alpha_{opt} = argmin_{\alpha \in \mathbb{R}} max\Big(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|\Big)$$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}, \quad \rho(I - \alpha_{opt} A) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} < 1$$

Problème: on ne connait pas les valeurs propres de A
Voir Exercice: Méthode de Richardson à pas variable

Méthode de Richardon pour les matrices SDP

Nombre d'itérations pour une précision fixée:

$$\|x^{k+1} - x\|_2 \leq \Big(\rho(I - \alpha_{opt} A)\Big)^k \|x^1 - x\|_2,$$

$$\|x^{k+1} - x\|_2 \leq \Big(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\Big)^k \|x^1 - x\|_2,$$

On cherche le nb d'itération k pour atteindre une précision ϵ, ie

$$\Big(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\Big)^k \leq \epsilon,$$

$$k \geq \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(\frac{1+\frac{1}{\kappa}}{1-\frac{1}{\kappa}})}$$

Pour κ grand:

$$k \gtrsim \frac{\kappa}{2} \ln(\frac{1}{\epsilon})$$

Méthode de Richardon à pas variable pour les matrices SDP

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ SDP (Symétrique Définie Positive).

$$\text{On pose } e^k = x - x^k,\ r^k = Ae^k = b - Ax^k,$$

et on considère l'algorithme itératif: x^1 donné et pour $k = 1, \cdots$

$$\begin{cases} \alpha^k = \dfrac{(r^k, r^k)}{(Ar^k, r^k)}, \\ x^{k+1} = x^k + \alpha^k\ r^k. \end{cases}$$

On montre que

$$\alpha^k = \text{Argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}}(Ae^{k+1}, e^{k+1}) = \alpha^2(Ar^k, r^k) - 2\alpha(r^k, r^k) + (Ae^k, e^k),$$

et

$$(Ae^{k+1}, e^{k+1}) = \left(1 - \frac{(r^k, r^k)^2}{(Ar^k, r^k)(A^{-1}r^k, r^k)}\right)(Ae^k, e^k),$$

d'où

$$(Ae^{k+1}, e^{k+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{\text{Cond}_2(A)}\right)(Ae^k, e^k)$$

Méthode de Richardon à pas variable pour les matrices SDP: algorithme

$Ax = b$ avec A matrice SDP

- Choix de la précision ϵ sur le résidu relatif
- Initialisation: $x^1, r^1 = b - Ax^1, nr = nr^0 = \|r^1\|$
- Itérer tant que $\frac{nr}{nr^0} \geq \epsilon$
  - $p^k = Ar^k$
  - $\alpha^k = \frac{(r^k, r^k)}{(p^k, r^k)}$
  - $x^{k+1} = x^k + \alpha^k r^k$
  - $r^{k+1} = r^k - \alpha^k p^k$
  - $nr = \|r^{k+1}\|$

Méthode de Richardon préconditionnée

Préconditionnement: matrice $C \in \mathcal{M}_n$ inversible

$$x^{k+1} = x^k + \alpha C^{-1}(b - Ax^k)$$

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha C^{-1}A)(x^k - x)$$

$$B = (I - \alpha C^{-1}A)$$

On cherche un préconditionnement C tel que

- $C \sim \alpha\ A$ ie $\rho(I - \alpha C^{-1}A) << 1$
- le système $Cy = r$ est peu coûteux à résoudre

Exemple des matrices et préconditionnements SDP

$A, C \in \mathcal{M}_n$ symétriques définies positives.

Soient $y = C^{1/2}x$, $y^k = C^{1/2}x^k$, $c = C^{-1/2}b$ on a

$$\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right)y = c,$$

La matrice $C^{-1/2}AC^{-1/2}$ est SDP, et

$$y^{k+1} = y^k + \alpha\left(c - C^{-1/2}AC^{-1/2}y^k\right)$$

Convergence ssi $\rho(I - \alpha C^{-1/2}AC^{-1/2}) < 1$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

$$\rho(I - \alpha_{opt} C^{-1/2}AC^{-1/2}) = \frac{\lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) - \lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

Exemple des matrices et préconditionnements SDP

$A, C \in \mathcal{M}_n$ symétriques définies positives.

Soient $y = C^{1/2}x$, $y^k = C^{1/2}x^k$, $c = C^{-1/2}b$ on a

$$\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right)y = c,$$

La matrice $C^{-1/2}AC^{-1/2}$ est SDP, et

$$y^{k+1} = y^k + \alpha\left(c - C^{-1/2}AC^{-1/2}y^k\right)$$

Convergence ssi $\rho(I - \alpha C^{-1/2}AC^{-1/2}) < 1$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

$$\rho(I - \alpha_{opt} C^{-1/2}AC^{-1/2}) = \frac{\lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) - \lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

Méthode de Richardon préconditionnée à pas variable pour les matrices et préconditionnements SDP: algorithme

Soient A et C SDP et le système $Ax = b$.
On applique l'algorithme de Richardon à pas variable au système

$$C^{-1/2}AC^{-1/2}y = C^{-1/2}b.$$

Il se formule comme précédemment avec la matrice $\widetilde{A} = C^{-1/2}AC^{-1/2}$, le second membre $c = C^{-1/2}b$, les itérés $y^k = C^{1/2}x^k$ et les résidus $\tilde{r}^k = C^{-1/2}r^k$.
En repassant à A, x, r on obtient:

- Choix de la précision ϵ sur le résidu relatif
- Initialisation: $x^1, r^1 = b - Ax^1, nr = nr^0 = \|r^1\|$
- Itérer tant que $\frac{nr}{nr^0} \geq \epsilon$
  - $q^k = C^{-1}r^k$
  - $p^k = Aq^k$
  - $\alpha^k = \frac{(q^k, r^k)}{(p^k, q^k)}$
  - $x^{k+1} = x^k + \alpha^k q^k$
  - $r^{k+1} = r^k - \alpha^k p^k$
  - $nr = \|r^{k+1}\|$

Exemples de préconditionnements

$$A = D - E - F$$

avec D diagonale de A (supposée inversible), $D - E = \text{tril}(A)$, $D - F = \text{triu}(A)$

- Jacobi:
$$C = D$$
- Gauss Seidel
$$C = D - E \text{ ou } C = D - F$$
- SOR (Successive over relaxation) $\omega \in (0, 2)$
$$C = \frac{D}{\omega} - E$$
- SSOR (Symmetric Successive over relaxation) $\omega \in (0, 2)$
$$C = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)\left(\frac{D}{\omega} - F\right)$$