

METHODES ITERATIVES (Relaxation)

Pour les très grosses matrices on préférera les méthodes itératives :
Elle convergent vers la solution progressivement:

Idée : Résoudre une équation du type : $F(x)=X$

Avec une suite du type : $X^{k+1}=F(X^k)$

Si X^0 n'est pas trop loin de la solution, on X^k convergera vers la bonne valeur de X .

Comment transformer : $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ en un équation du type $\mathbf{X}=\mathbf{F}(\mathbf{X})$? Où F est une opération linéaire ??

Idée : Décomposer $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$

Alors $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{MX} = \mathbf{NX} + \mathbf{B} \Leftrightarrow$

$$\mathbf{X} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{X} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}}_{\mathbf{F}(\mathbf{x})} = \mathbf{P} \mathbf{X} + \mathbf{C}$$



$\mathbf{F}(\mathbf{x})$

Donc si on arrive à trouver une décomposition de \mathbf{A} avec une matrice \mathbf{M} facilement inversible, alors on peut mettre en marche un algorithme itératif du type :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{P} \mathbf{X}_k + \mathbf{C}$$

Décomposition E, D, F : idée : prendre pour M une simple matrice diagonale D

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \dots & & \vdots \\ -a_{i,j} & & \dots & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{i,i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & -a_{i,j} & & \dots & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $A = D - (E + F) \Leftrightarrow M = D$ et $N = E + F$

Dans ce cas $M^{-1} = D^{-1}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{1,1} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & 1/a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

La formule de récurrence : $\mathbf{X}_{k+1} = M^{-1} \mathbf{N} \mathbf{X}_k + M^{-1} \mathbf{B}$

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}$$

S'écrit :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right), \quad 1 \leq i \leq n$$

Où les x_i^k sont les composantes du vecteur \mathbf{X}^k

C'est la méthode de Jacobi

Méthode de Gauss Seidel :

Converge plus rapidement .

On s'inspire du calcul de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right), \quad 1 \leq i \leq n$$

Mais on fait la première somme sur les coeffs déjà calculés de l'étape k+1

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} \right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ca converge plus vite, mais difficilement parallélisable ...

A doit être à « dominante diagonale » i.e ABS(diagonale)soit être > somme des v.abs des éléments sur la ligne pour être *sûr* de la convergence....

Nous avons vu 2 familles de méthodes :

-Les méthodes exactes, type pivot de Gauss

Précises, peu rapides, sensibles aux fluctuations

- Les méthodes itératives (ou dites de « relaxation »)

Moins précises, plus rapides, plus stables...

Mais il est parfois difficile de prédire si elles convergent

Plus on fait d'itérations, plus la méthode est précise..

La matrice doit être à diagonale dominante...