Quelques rappels d'algèbre linéaire en dimension finie

MR. BEY Mohamed-Amine

DAUPHINE
UNIVERSITÉ PARIS

Matrice d'une application linéaire

- Bases $\left(\mathbf{e}_j, j = 1, \cdots, n\right)$ de E et $\left(\mathbf{f}_i, i = 1, \cdots, m\right)$ de F
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{i,j}\mathbf{f}_i$
- $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j \in E$
- $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j\right)\mathbf{f}_i$
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad Y = AX$
- Retenir que les n colonnes j de A sont données par les images $f(\mathbf{e}_j)$
- Espace vectoriel des matrices de dimension m, n: $\mathcal{M}_{m,n}$ (à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- Matrices remarquables: diagonale, symétrique, triangulaires inférieure ou supérieure

Exercice: produit de matrices versus composition d'applications linéaires

- Soient E, F, G des e.v de dimensions resp. n, m, p, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$
- Des bases étant données, f a pour matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et g a pour matrice $B \in \mathcal{M}_{p,m}$
- $g \circ f$ a pour matrice le produit $BA \in \mathcal{M}_{p,n}$ tel que

$$(BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} B_{i,k} A_{k,j}$$

- Produit de matrices: $\mathcal{M}_{p,m} \times \mathcal{M}_{m,n} \to \mathcal{M}_{p,n}$
  - produit matrice vecteur: $\mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{n,1} \to \mathcal{M}_{m,1}$
  - produit scalaire de deux vecteurs: ligne . colonne $\mathcal{M}_{1,n} \times \mathcal{M}_{n,1} \to \mathcal{M}_{1,1}$
  - produit tensoriel de deux vecteurs: colonne. ligne $\mathcal{M}_{n,1} \times \mathcal{M}_{1,n} \to \mathcal{M}_{n,n}$

Exercice: changements de base pour les vecteurs et les matrices

- P: matrice de passage d'une base dans une autre $\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^{n} P_{k,j}\mathbf{e}_k$ (colonnes de la nouvelle base dans l'ancienne)
- Changement de base pour les coordonnées des vecteurs: $X = P\tilde{X}$.
- Changement de base pour les matrices des applications linéaires: $X = P\tilde{X}$, $Y = Q\tilde{Y}$ et $\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}$, $Y = AX$ implique que

$$\tilde{A} = Q^{-1}AP.$$

Matrices carrés inversibles

- $A \in \mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{M}_n$ est inversible ssi l'une des propriétés suivantes est vérifiée
  - Il existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}$ tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  - A est injective ie $AX = 0 \Rightarrow X = 0$
  - A est surjective ie $\mathrm{Im}(A) = \{AX,\ X \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$

- $A, B \in \mathcal{M}_n$ inversibles

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Transposition de matrices

- $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on définit $A^t \in \mathcal{M}_{n,m}$ par

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i} \text{ pour tous } i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$$

- Produit scalaire canonique de deux vecteurs (colonnes) $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$X^t Y = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

- Matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est symétrique ssi

$$A^t = A$$

Diagonalisation d'une matrice carrée symétrique $A \in \mathcal{M}_n$

- Les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ d'une matrice réelle symétrique A sont réelles et il existe une base orthonormée de vecteurs propres $F^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, n$ telle que
$$AF^i = \lambda_i F^i \text{ et } (F^i)^t F^j = \delta_{i,j} \text{ pour tous } i, j = 1, \cdots, n$$
- Si P est la matrice de passage de la base canonique dans la base F^i, $i = 1, \ldots, n$, alors on a
$$P^{-1} = P^t$$
et
$$P^t A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Déterminants de n vecteurs dans un e.v. E de dimension n pour une base donnée

- Unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 sur la base
  - $\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}_n\Big) = 0$ (alternée)
  - Antisymétrie:

$$\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_n\Big) = -\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_n\Big)$$

  - On a donc aussi pour toute permutation σ de $\{1, \cdots, n\}$,

$$\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\Big) = \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{Det}\Big(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}\Big)$$

- Déterminant d'une matrice carrée $A =$ déterminant des vecteurs colonnes

$$\mathrm{Det}\Big(A\Big) = \mathrm{Det}\Big(A_{.,1}, \cdots, A_{.,n}\Big) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(\sigma) A_{\sigma(i),i}$$

Propriétés du déterminant

- Les vecteurs colonnes de A sont libres ssi $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- Donc A est inversible ssi $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(BA)$
- $\mathrm{Det}(A^t) = \mathrm{Det}(A)$
- Développement par rapport aux lignes ou aux colonnes

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\mathrm{Det}(A^{(i,j)}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\mathrm{Det}(A^{(i,j)})$$

Normes matricielles

- Une norme matricielle sur l'e.v. $\mathcal{M}_n$ est une norme telle que

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

- Une norme matricielle induite par une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme matricielle définie par

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

- On a pour une norme matricielle induite: $\|AX\| \leq \|A\| \|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

Exercice: exemples de normes induites

- $\|A\|_\infty = \text{Sup}_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$
- $\|A\|_1 = \text{Sup}_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|$
- $\|A\|_2 = \text{Sup}_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} = \rho({}^t AA)^{1/2}$

Convergence de la suite A^k pour $A \in \mathcal{M}_n$

- Rayon spectral $\rho(A)$, $A \in \mathcal{M}_n$ est le module de la valeur propre maximale de A dans $\mathbb{C}$.
- On admettra le lemme suivant:
  - $\rho(A) < 1$ ssi $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$ quel que soit la norme sur $\mathcal{M}_n$
  - $\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} \|A^k\|^{1/k}$ quel que soit la norme sur $\mathcal{M}_n$
  - $\rho(A) \leq \|A\|$ quel que soit la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$

Matrices de la forme $I + A$ ou $I - A$

- Si $\rho(A) < 1$ alors les matrices $I + A$ et $I - A$ sont inversibles
- La série de terme général A^k converge (vers $(I - A)^{-1}$ ssi $\rho(A) < 1$
  - Preuve: $\sum_{k=0}^{N} A^k(I - A) = I - A^{N+1}$ et utiliser le lemme précédent
- Si $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle, alors $I - A$ est inversible et on a $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ (idem pour $I + A$)