Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux dirigés

Méthode d'élimination de Gauss

Exercice 1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss, en donnant l'expression de toutes les matrices et seconds membres intermédiaires, le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Répondre à la même question avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Est-il possible d'utiliser la méthode d'élimination de Gauss (sans échange) pour la résolution de ce système linéaire ?
2. Trouver une permutation de A, de la forme PAQ, sur laquelle on peut réaliser l'élimination. Comment transforme-t-elle le système linéaire ?

Exercice 3. Soit la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer son inverse en résolvant le système matriciel $UX = I_4$ dans lequel X désigne une matrice carrée d'ordre 4 par la méthode d'élimination de Gauss–Jordan.

Exercice 4. Donner une formulation matricielle (c'est-à-dire en termes d'un produit de matrices) de la réduction à la forme échelonnée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

Exercice 5. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss–Jordan, déterminer le système sous forme échelonnée réduite équivalent à $(\mathcal{S})$.
2. Préciser le rang et la dimension du noyau de la matrice échelonnée réduite obtenue et en déduire ceux de la matrice A.
3. Déterminer une base de l'espace image et du noyau de la matrice A.
4. Quelle(s) condition(s) doit vérifier le vecteur $\boldsymbol{b}$ pour que le système $(\mathcal{S})$ ait une solution ?