Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux dirigés

Méthodes de factorisation pour la résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. On considère le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
2. Résoudre le système linéaire en utilisant la factorisation trouvée à la question précédente.
3. Calculer le déterminant de la matrice A.

Exercice 2. Déterminer les factorisations LU des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

en précisant à chaque étape les matrices intervenant dans le procédé de factorisation.

Exercice 3 (factorisation LU d'une matrice bande). On dit qu'une matrice est une matrice bande si elle n'admet que des éléments non nuls sur un « certain nombre » de diagonales autour de la diagonale principale. Plus précisément, une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de largeur de bande valant $2p+1$ est telle qu'il existe un entier naturel p tel que $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| > p$.
Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bandes au sens suivant : *soit A une matrice carrée d'ordre n admettant une factorisation LU, alors*

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| > p \Rightarrow\ l_{ij} = 0 \text{ pour } i-j > p \text{ et } u_{ij} = 0 \text{ pour } j-i > p.$$

Exercice 4 (factorisation LU d'une matrice tridiagonale). Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ d_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & d_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & d_n & a_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale d'ordre n.

1. Vérifier que si A admet une factorisation LU alors les matrices L et U sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & u_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que les coefficients u_i, $1 \leq i \leq n$, et l_j, $2 \leq j \leq n$, satisfont les relations

$$u_1 = a_1,\ l_i = \frac{d_i}{u_{i-1}},\ u_i = a_i - l_i c_{i-1},\ 2 \leq i \leq n.$$

3. Obtenir les formules découlant de l'utilisation de cette factorisation pour la résolution du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$ donné.
4. Donner le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de ce système.

Exercice 5 (factorisation LU d'une matrice à diagonale strictement dominante). Soit A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant les conditions

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'une telle matrice est inversible et qu'elle admet une factorisation LU.

1. Montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes est inversible.
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer que A admet une factorisation LU si et seulement si A^T admet une factorisation LU.
3. Soit A une matrice carrée d'ordre n, que l'on partitionne en quatre blocs de la manière suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{w}^T \\ \hline \boldsymbol{v} & A_1 \end{array}\right),$$

avec $a = a_{11} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et A_1 une matrice carrée d'ordre $n-1$. En effectuant un produit par blocs, vérifier alors que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline \frac{\boldsymbol{v}}{a} & I_{n-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{w}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & I_{n-1} \end{array}\right),\ \text{avec } B = A_1 - \frac{1}{a}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^T,$$

où $\boldsymbol{0}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^{n-1}$.

4. Montrer que si la matrice B admet une factorisation LU, alors A également.
5. Dans cette question, on suppose que la matrice A est à diagonale strictement dominante par *colonnes*.

   a. En utilisant la décomposition et les notations introduites dans la question précédente, Montrer que

   $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i| < |a| - |v_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   puis que

   $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| < |(A_1)_{jj}| - |w_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   et enfin que

   $$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |b_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| + \frac{|w_j|}{|a|} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i|,\ 1 \leq j \leq n-1.$$

   En déduire que la matrice B est à diagonale strictement dominante par colonnes.

b. En admettant éventuellement le dernier résultat et en faisant un raisonnement par récurrence, montrer que A admet une factorisation LU.

6. En supposant à présent que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes, déduire des questions précédentes qu'elle admet une factorisation LU.
7. On considère les trois matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en justifiant très simplement la réponse, lesquelles de ces matrices admettent une factorisation LU et, le cas échéant, calculer leur factorisation LU en précisant à chaque étape les opérations effectuées sur les lignes de la matrice factorisée.

Exercice 6 (factorisation de Cholesky). Une matrice symétrique d'ordre n définie positive est une matrice symétrique d'ordre n telle que

$$\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{v} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,\ \text{ et } \boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A admet une factorisation de Cholesky s'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B à diagonale principale strictement positive telle que

$$A = BB^T.$$

1. Montrer que si A est symétrique définie positive alors A est inversible.
2. Montrer que si A admet une factorisation de Cholesky alors A est une matrice symétrique définie positive.
3. Montrer que si A admet une factorisation de Cholesky alors A admet une factorisation LDL^T. En déduire que si A admet une factorisation de Cholesky, cette factorisation est unique dès lors que les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs.

Dans toute la suite, on suppose que A est une matrice symétrique d'ordre n définie positive.

4. Dans cette question, on veut prouver que la matrice A admet une factorisation de Cholesky par un raisonnement par récurrence.

a. Pour $n > 1$, écrire la matrice A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{l}^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

où $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a_{nn} \in \mathbb{R}$ et A_{n-1} est une matrice symétrique d'ordre $n-1$. Montrer que A_{n-1} est définie positive.

b. On suppose que A_{n-1} admet une décomposition de Cholesky, c'est-à-dire qu'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B_{n-1} telle que $A_{n-1} = B_{n-1}{B_{n-1}}^T$. Montrer que l'on peut déterminer de manière unique $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, tels que

$$B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ \boldsymbol{m}^T & b \end{pmatrix}$$

et $A = BB^T$.

c. En déduire que A admet une factorisation de Cholesky.

5. Écrire l'algorithme permettant de calculer les coefficients de la matrice B.
6. Comparer le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un système linéaire à matrice symétrique définie positive par la méthode de Cholesky avec celui de la méthode d'élimination de Gauss.

7. **Application :** déterminer la factorisation de Cholesky des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & -4 \\ 3 & -7 & 14 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre ε la matrice A est symétrique définie positive.
2. On suppose tout d'abord que $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par une méthode directe ; quelle factorisation de la matrice A envisager dans ce cas ?
3. On suppose maintenant que $\varepsilon = 2$.
   a. Vérifier que la matrice A est définie positive et en calculer la factorisation de Cholesky.
   b. En supposant que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant la factorisation calculée à la question précédente.

Exercice 8 (factorisation QR). Soit A une matrice réelle d'ordre n inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que
$$A^T A = R^T R.$$
2. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Q, c'est-à-dire vérifiant $Q^T Q = QQ^T = I_n$, telle que
$$A = QR. \tag{1}$$
3. Montrer que la décomposition (1) est unique.
4. Notons $(\boldsymbol{a}_j)_{1\leq j\leq n}$ les colonnes de la matrice A, $(\boldsymbol{q}_j)_{1\leq j\leq n}$ celles de Q et posons $R = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
   a. Montrer que $\boldsymbol{a}_j = \sum_{k=1}^{j} r_{kj}\boldsymbol{q}_k$, $j = 1, \ldots, n$.
   b. En déduire qu'obtenir la factorisation (1) équivaut à construire une base orthonormale à partir de la famille $\{\boldsymbol{a}_j\}_{1\leq j\leq n}$.