feuille de travaux dirigés

Interpolation polynomiale

Exercice 1. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-1,1]$, interpolée aux nœuds -1 et 1. Montrer que, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1]$, on a alors

$$|f(x) - \Pi_1 f(x)| \leq \frac{M_2}{2}(1-x^2) \leq \frac{M_2}{2},\ \forall x \in [-1,1],$$

où $M_2 = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est une égalité.

Exercice 2. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, de la fonction $f : x \mapsto x^3$, interpolée aux nœuds 0 et a. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0,a[$, il existe un point $c \in [0,a]$ tel que

$$f(x) - \Pi_1 f(x) = \frac{f''(c)}{2}\, x(x-a),$$

et établir que $c = \frac{1}{3}(x+a)$.
Considérer ensuite la fonction $f : x \mapsto (2x-a)^4$ et montrer que, dans ce cas, il y a deux valeurs possibles pour c. Les déterminer.

Exercice 3. Soit n un entier positif. Étant donnés $n+2$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n+1$, et $n+2$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n+1$, on note $\Pi_{0,\dots,n}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n}$ et $\Pi_{1,\dots,n+1}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de points $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\dots,n+1}$. On pose

$$p(x) = \frac{(x-x_0)\,\Pi_{1,\dots,n+1}(x) - (x-x_{n+1})\,\Pi_{0,\dots,n}(x)}{x_{n+1}-x_0}.$$

Montrer que p est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $n+1$ associé aux points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n+1}$.

Exercice 4 (forme de Newton du polynôme d'interpolation). Soit n un entier strictement positif. Étant donné $n+1$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n$, et $n+1$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n$, on note Π_j, $j \in \{0,\dots,n\}$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré j associé aux points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,j}$.

1. On pose
$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + q_n(x).$$
Montrer que $q_n(x) = a_n\,\omega_n(x)$, où a_n est un coefficient à expliciter et $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$. La constante a_n est appelée $n^{\text{ième}}$ *différence divisée de Newton* et sera notée $[x_0,\dots,x_n]\boldsymbol{y}$ dans la suite de l'exercice.
2. On pose $[x_0]\boldsymbol{y} = y_0$ et $\omega_0 \equiv 1$. Montrer que
$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n}[x_0,\dots,x_k]\boldsymbol{y}\,\omega_k(x),$$
où $[x_0,\dots,x_k]\boldsymbol{y}$ est la $k^{\text{ième}}$ différence divisée de Newton. Cette écriture est appelée *forme de Newton* du polynôme d'interpolation.

3. Montrer que
$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,\omega'_{n+1}(x_i)}\, y_i,$$
et en déduire que
$$[x_0,\ldots,x_n]\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\omega'_{n+1}(x_i)}.$$
4. Obtenir enfin la formule de récurrence permettant le calcul des différences divisées :
$$[x_0,\ldots,x_n]\boldsymbol{y} = \frac{[x_1,\ldots,x_n]\boldsymbol{y} - [x_0,\ldots,x_{n-1}]\boldsymbol{y}}{x_n - x_0}.$$
Peut-on en déduire un avantage de la forme de Newton du polynôme d'interpolation sur la forme de Lagrange ?

Exercice 5 (polynômes de Tchebychev et meilleurs points d'interpolation). Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de montrer que les points $x_0, \ldots, x_n$ appartenant à un intervalle $[a,b]$ et minimisant [1]
$$\sup_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$
sont reliés aux racines d'un polynôme particulier, dit *de Tchebychev*. Quitte à effectuer un changement de variable affine, on peut supposer que $[a,b] = [-1,1]$. Pour tout x dans l'intervalle $[-1,1]$, on pose alors $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Montrer que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ et que l'on a la relation de récurrence
$$T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x).$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que le polynôme T_n est de degré n, que son monôme de plus haut degré est $2^{n-1}x^n$ et que ses racines sont les nombres $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$ (T_n est alors appelé le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev).
3. Montrer que la fonction T_n admet sur $[-1,1]$ des extrema locaux aux points $x'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$, $k = 0, \ldots, n$, et que $T_n(x'_k) = (-1)^k$.
4. Montrer alors que
$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|,$$
pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$, les points x_k, $k = 0, \ldots, n$, étant les racines du polynôme T_{n+1}.

1. Cette quantité apparaît dans l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - \Pi_n f(x)$, mesurée en norme du maximum, d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.