Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux dirigés

Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 (norme matricielle subordonnée). Soit n un entier strictement positif. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients complexes et on rappelle qu'une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ est une application vérifiant les propriétés suivantes :

- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, et $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$,
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A,\ B \in M_n(\mathbb{C})$,
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall A,\ B \in M_n(\mathbb{C})$.

Pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \dots, \infty$, sur $\mathbb{C}^n$, on définit la norme matricielle subordonnée associée par

$$\|A\|_p = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p},\ \forall A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, montrer les propriétés suivantes :

1. $\|A\|_p \geq \rho(A)$, où $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| \,|\, \lambda_i \in \sigma(A),\ 1 \leq i \leq n\}$ est le rayon spectral de A,
2. $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$,
3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$,
4. $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2$ pour toute matrice unitaire U (c'est-à-dire telle que $UU^* = I_n$),
5. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Exercice 2 (rayon spectral et série de Neumann). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Montrer que

1. on a $\rho(A) < 1$ si et seulement si A^k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini,
2. si $\rho(A) < 1$, alors les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles,
3. la série de terme général A^k converge (vers $(I_n - A)^{-1}$) si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 3 (convergence de méthodes itératives pour les matrices à diagonale strictement dominante). Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Montrer alors que la matrice A est inversible et que les méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel, utilisées pour la résolution du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\boldsymbol{b}$ un vecteur donné, convergent toutes deux.

Exercice 4. On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel pour cette matrice.
2. Vérifier que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, où B_{GS} et B_J désignent respectivement les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi. Laquelle de ces deux méthodes converge le plus rapidement ?

Exercice 5. On considère les méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Étudier la convergence de ces deux méthodes en fonction de la valeur du paramètre réel α.

Exercice 6. Soit α et β deux réels. On considère les matrices

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de α (resp. β) la matrice A_α (resp. C_β) est-elle définie positive ?
2. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi associée à A_α (resp. C_β). Pour quelles valeurs de α (resp. β) cette méthode converge-t-elle ?
3. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel associée à A_α et calculer son rayon spectral. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence de cette méthode ?

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer (par des exemples) qu'on ne peut établir un résultat général de comparaison de convergence entre les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi.

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_J) < 1 < \rho(B_{GS})$, où B_{GS} et B_J désignent les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi respectivement.
2. Soit maintenant
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_{GS}) < 1 < \rho(B_J)$.

Exercice 8 (une méthode de relaxation). On considère pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec A une matrice non singulière dont les éléments diagonaux sont tous non nuls, la méthode itérative définie par

$$(D - E)\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = F\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \omega\, \boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} + (1 - \omega)\, \boldsymbol{x}^{(k)},$$

où ω est un paramètre réel, D est la partie diagonale de A, E est la partie triangulaire inférieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$ et F est la partie triangulaire supérieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$.

1. Réécrire cette méthode itérative sous la forme
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B_\omega \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}_\omega,$$
en explicitant la matrice d'itération B_ω et le vecteur $\boldsymbol{c}_\omega$. Vérifier que l'on retrouve la méthode de Gauss–Seidel lorsque $\omega = 1$.

2. Soit maintenant
$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$
Donner les valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode itérative est convergente dans ce cas.

Exercice 9. Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = I_3 - E - F$ avec
$$E=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et } F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{\omega}\, I_3 - E$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Pour $0 < \omega < 2$, $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on considère, pour la résolution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, la méthode itérative définie par
$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \left(\frac{1}{\omega}\, I_3 - E\right)\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}\, I_3\right)\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b},\ \forall k \in \mathbb{N},$$
et on pose $\mathcal{L}_\omega = \left(\dfrac{1}{\omega}\, I_3 - E\right)^{-1}\left(F + \dfrac{1-\omega}{\omega}\, I_3\right)$. Calculer, en fonction de ω, les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ et son rayon spectral.
4. Pour quelles valeurs de ω cette méthode converge-t-elle ?
5. Déterminer $\omega_0 \in]0,2[$ vérifiant $\rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \min\left\{\rho(\mathcal{L}_\omega)\,|\,\omega \in]0,2[,\ \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Exercice 10 (méthode de Richardson). Pour résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, on considère la suite construite par la méthode de Richardson stationnaire non préconditionnée, encore connue sous le nom de méthode du gradient à pas fixe, définie par la relation de récurrence
$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha\,(A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}),\ \forall k \in \mathbb{N},$$
avec α un réel non nul.

1. Montrer que, si la méthode converge, la limite $\boldsymbol{x}$ de la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
2. Montrer que, si
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix},$$
il n'existe pas de α non nul tel que la méthode converge.
3. Discuter la convergence de la méthode lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

Exercice 11 (convergence de la méthode de Richardson pour une matrice symétrique définie positive). On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, noté $(\cdot\,,\cdot)$, et de la norme associée $\|\boldsymbol{v}\|_2 = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}$. Soit A une matrice symétrique d'ordre n vérifiant
$$\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,\ (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq c\,\|\boldsymbol{v}\|_2{}^2.$$

1. Montrer que $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$. En déduire que, pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une unique solution.

2. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et on construit la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha(A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

   On note $\boldsymbol{r}^{(k)} = A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}$ le résidu à l'étape k.

   a. Montrer que $\boldsymbol{r}^{(k)} = (I_n - \alpha\, A)\boldsymbol{r}^{(k-1)}$, puis que $\boldsymbol{r}^{(k)} = (I_n - \alpha\, A)^k \boldsymbol{r}^{(0)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

   b. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$. Montrer que

$$\|(I_n - \alpha\, A)\boldsymbol{x}\|_2{}^2 \leq \alpha^2 \|A\|_2{}^2 - 2c\alpha + 1.$$

   c. En déduire que $\|I_n - \alpha\, A\|_2 < 1$ pour α appartenant à un intervalle bien choisi.

3. Déduire de la question précédente une condition nécessaire sur α pour que la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.