Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux dirigés

Méthodes de résolution des équations non linéaires

Exercice 1 (vitesse de convergence de la méthode de la fausse position). Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)f(b) < 0$. La méthode de la fausse position appliquée à la recherche d'un zéro de f est obtenue en remplaÃğant dans l'algorithme de la méthode de dichotomie le point milieu $x^{(k)} = \frac{1}{2}(a^{(k)} + b^{(k)})$ par l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points $(a^{(k)}, f(a^{(k)}))$ et $(b^{(k)}, f(b^{(k)}))$ avec l'axe des abscisses.

1. Déterminer $x^{(k)}$ en fonction de $a^{(k)}$, $f(a^{(k)})$, $b^{(k)}$ et $f(b^{(k)})$.
2. Pour étudier la vitesse de convergence de cette méthode, on fait les hypothèses additionnelles que f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et que les dérivées f' et f'' ne s'annulent pas sur cet intervalle, de telle sorte que ξ soit un zéro simple de f. Dans ces conditions, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode converge vers ξ.
   a. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\theta \in [a, b]$ tel que
   $$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + \frac{1}{2}\,(x - a)(x - b)f''(\theta).$$
   Indication : on pourra poser, pour tout $x \in]a, b[$ fixé et tout $t \in [a, b]$,
   $$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)(x - b)}\,(t - a)(t - b),\ \textit{avec}\ p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a),$$
   et utiliser le théorème de Rolle.
   b. En appliquant le résultat précédent au point ξ et à l'intervalle $[a^{(k)}, b^{(k)}]$, montrer qu'il existe $\theta^{(k)} \in [a^{(k)}, b^{(k)}]$ tel que
   $$\frac{f(b^{(k)}) - f(a^{(k)})}{b^{(k)} - a^{(k)}}\,(\xi - x^{(k)}) = -\frac{1}{2}\,(\xi - a^{(k)})(\xi - b^{(k)})f''(\theta^{(k)}).$$
   c. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\eta^{(k)} \in [a^{(k)}, b^{(k)}]$ tel que
   $$\xi - x^{(k)} = -\frac{1}{2}\,(\xi - a^{(k)})(\xi - b^{(k)})\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}.$$
   d. On suppose à présent que $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, montrer que $b^{(k+1)} = b$ et $a^{(k+1)} = x^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Étudier alors le comportement de la suite $\left(\frac{|\xi - x^{(k+1)}|}{|\xi - x^{(k)}|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 2 (étude de convergence de la méthode de point fixe). Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application continue de $[a, b]$ dans lui-même.

1. Montrer que g possède au moins un point fixe ξ dans l'intervalle $[a, b]$.

2. On suppose à présent que la fonction g est continûment dérivable dans un voisinage $I = [\xi - h, \xi + h]$ de ξ et que, **uniquement dans cette question**, $|g'(\xi)| < 1$. On va montrer que la suite définie par
$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$
converge vers ξ dès que l'initialisation $x^{(0)}$ est suffisamment proche de ξ. On dit alors que ξ est un point fixe *attractif* de g.
   a. Montrer qu'il existe $0 < \delta \leq h$ tel que
   $$|g'(x) - g'(\xi)| \leq \frac{1}{2}\left(1 - |g'(\xi)|\right),\ \forall x \in I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta].$$
   b. En déduire qu'il existe une constante $0 < L < 1$ telle que $|g'(x)| \leq L$, $\forall x \in I_\delta$.
   c. En déduire que si $x^{(k)} \in I_\delta$, alors
   $$|x^{(k+1)} - \xi| \leq L\,|x^{(k)} - \xi|,$$
   et que, si $x^{(0)} \in I_\delta$, alors
   $$x^{(k)} \in I_\delta \text{ et } |x^{(k)} - \xi| \leq L^k\,|x^{(0)} - \xi|,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$
   d. En conclure que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ.
3. On suppose dans cette question que $|g'(\xi)| > 1$. En s'inspirant des étapes de la question précédente, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour k suffisamment grand, $x^{(k)}$ n'appartient pas à I_δ. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut *a priori* converger vers ξ, quelle que soit l'initialisation $x^{(0)} \neq \xi$. On dit alors que ξ est un point fixe[1] ***répulsif*** de g.
4. **Application.** Étudier les méthodes de point fixe associées aux fonctions suivantes :
$$g_1(x) = \ln(1+x) + 0{,}2,\ \ g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + c),\ \text{avec } 0 \leq c < 1,\ \text{ et } g_3(x) = -\ln(x).$$

Exercice 3. On souhaite calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ par une méthode de point fixe utilisant la fonction
$$g(x) = \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + (1-\omega)\,x^3 + \frac{2\omega}{3\,x^2} + 2(\omega - 1),$$
ω étant un paramètre réel.

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω la convergence de la méthode est-elle d'ordre supérieur à un ?
3. Existe-t-il une valeur du paramètre ω telle que l'ordre de la méthode soit supérieur à deux ?

Exercice 4 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro simple). Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ξ un zéro simple de f, c'est-à-dire tel que $f(\xi) = 0$ et $f'(\xi) \neq 0$, contenu dans $[a, b]$.

On se propose de déterminer le zéro ξ par la méthode de Newton–Raphson, c'est-à-dire en tant que limite de la suite récurrente définie par
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}),\ \ k \geq 0,$$
l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. Le réel ξ étant aussi un point fixe de la fonction ϕ, on rappelle que l'ordre de convergence d'une méthode itérative de la forme $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ est égal à r, avec $r \geq 1$, s'il existe, pour k suffisamment grand, une constante $C > 0$ telle que
$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq C|x^{(k)} - \xi|^r.$$

1. En effet, si $x^{(0)} = \xi$, alors la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut ξ.

1. Montrer que, pour $x^{(k)}$ suffisamment proche de ξ, $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\xi - x^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{f'(x^{(k)})}\, f''\left(x^{(k)} + \theta(\xi - x^{(k)})\right)\,(\xi - x^{(k)})^2,\ 0 < \theta < 1,$$

   et en conclure que l'ordre de convergence de la méthode de Newton–Raphson est deux.
2. En déduire qu'il existe $K > 0$ telle que si $|x^{(0)} - \xi| \leq K$, alors la méthode de Newton–Raphson converge.

Exercice 5 (exemple de divergence de la méthode de Newton–Raphson). On considère la fonction $f(x) = \arctan(x)$, qui a pour zéro $\xi = 0$.

1. Écrire l'équation de récurrence de la méthode de Newton–Raphson utilisée pour approcher le zéro de f. On notera g la fonction dont ξ est le point fixe ainsi définie.
2. Montrer que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1 + x^2}$$

   alors $|g(x)| > |x|$.
3. Étudier l'application $x \mapsto (1 + x^2)\arctan(x) - 2\,x$ sur $[0, +\infty[$. En déduire que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1 + x^2}$$

   alors

$$\arctan(|g(x)|) > \frac{2\,|g(x)|}{1 + g(x)^2}.$$

4. En conclure que si

$$\arctan(|x^{(0)}|) > \frac{2\,|x^{(0)}|}{1 + (x^{(0)})^2}$$

   alors

$$\lim_{k \to +\infty} |x^{(k)}| = +\infty.$$

Exercice 6 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro multiple). Soit f une fonction $m+1$ fois continûment dérivable ($m \geq 2$) dans l'intervalle $[a, b]$ et ξ un zéro multiple de f d'ordre m, c'est-à-dire tel que

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(m-1)}(\xi) = 0 \text{ et } f^{(m)}(\xi) \neq 0,$$

contenu dans $[a, b]$. On cherche à appliquer la méthode de Newton–Raphson pour approcher ξ, en définissant la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}),\ k \geq 0,$$

l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. On note que la fonction g n'est pas définie au point ξ.

1. Montrer alors que l'on peut prolonger g par continuité et que la fonction ainsi obtenue est dérivable au voisinage de ξ, telle que

$$g'(\xi) = 1 - \frac{1}{m}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que si $|x^{(0)} - \xi| \leq K$ alors la méthode de Newton–Raphson converge et que cette convergence est linéaire.

3. On suppose la valeur de l'entier m connue *a priori*. On a alors recours à la méthode modifiée, définie par
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},\ k \geq 0,$$
avec $x^{(0)}$ donnée. Quel est l'ordre de convergence de cette nouvelle méthode ?

Exercice 7 (étude de la méthode de Héron pour le calcul de $\sqrt{2}$). Pour calculer $\sqrt{2}$, on propose de construire une suite récurrente définie par
$$x^{(0)} = 1,\ x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{2}{x^{(k)}}\right) \text{ pour } k \geq 0.$$

1. Étudier la fonction $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer son graphe.
2. Construire graphiquement les premiers termes de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Vérifier que g est une application contractante de $[1,2]$ dans lui-même. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Pour quelles valeurs de l'initialisation $x^{(0)}$ la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
5. Montrer que la convergence de cette méthode est quadratique. Que dire d'autre ?