Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux pratiques

Séance 9 : interpolation polynomiale et formules de quadrature

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel. Le travail demandé peut être effectué indifférement avec MATLAB ou le logiciel libre GNU OCTAVE (`http://www.gnu.org/software/octave/`).

Exercice 1 (interpolation de Lagrange à l'aide des matrices de Vandermonde). Dans MATLAB et GNU OCTAVE, toute fonction polynomiale de degré $n \geq 0$, $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n$, est représentée par un tableau `p=[an,...,a2,a1,a0]` contenant[1] les $n+1$ coefficients du polynôme qui lui est associé. La commande `polyval(p,x)` permet alors d'évaluer n'importe quelle fonction polynomiale p en un point (ou groupe de points) x donné. Enfin, la commande `vander(x)` renvoie la matrice de Vandermonde associée à un ensemble de nœuds contenu dans le tableau `x`.

1. Écrire une fonction `lagrange`, ayant pour arguments une fonction continue f, les bornes d'un intervalle $[a, b]$ et un entier positif n, construisant le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_n f$ associé à une distribution uniforme de $n+1$ points dans l'intervalle $[a, b]$ par résolution du système linéaire de Vandermonde correspondant.
2. Utiliser cette fonction pour construire les polynômes d'interpolation de Lagrange $\Pi_n \sin$ de la fonction sinus à nœuds équirépartis sur l'intervalle $[0, 3\pi]$, avec $n = 1, \dots, 5$. Comparer les graphes des polynômes obtenus avec celui de la fonction donnée sur ce même intervalle.
3. Évaluer de manière approchée l'erreur
$$E_n(\sin) = \max_{x \in [0,3\pi]} |\sin(x) - \Pi_n \sin(x)|$$
et représenter sur un graphe les valeurs obtenues en fonction de n, pour $n = 1, \dots, 12$, en utilisant la commande `semilogy`. Que se passe-t-il pour $n > 12$?
4. En observant que $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, comparer les valeurs de l'erreur obtenues à la question précédente avec celles fournies par la majoration théorique
$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Exercice 2 (phénomène de Runge et points de Chebyshev). On considère, sur l'intervalle $[-5, 5]$, la fonction
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Utiliser la fonction `lagrange` de l'exercice précédent pour construire le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_n f$ de degré n, avec $n = 2, 4, 8$ et 12, de f en des nœuds équirépartis sur $[-5, 5]$ et comparer graphiquement les polynômes obtenus avec la fonction donnée.
2. Évaluer de manière approchée l'erreur
$$E_n(f) = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$$
et représenter sur un graphe les valeurs obtenues en fonction de n, pour $n = 1, \dots, 20$. Qu'observe-t-on ?

1. On notera que le premier élément du vecteur correspond au coefficient du terme de plus haut degré.

Interpoler une fonction en des nœuds équidistribués sur un intervalle $[a, b]$ n'est pas forcément le meilleur choix, comme le montre l'absence de convergence de l'interpolation de Lagrange constatée à la question précédente. Pour une interpolation de degré n, on peut montrer que l'erreur sera minimale si les nœuds d'interpolation $\{x_k\}_{0\leq k\leq n}$ sont (à une transformation affine près) les racines du polynôme de Chebyshev T_{n+1}, c'est-à-dire si

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\,\pi\right),\ \forall k \in \{0, \dots, n\}.$$

3. Modifier la fonction `lagrange` pour que l'interpolation soit faite aux points de Chebyshev définis ci-dessus.
4. Reprendre alors les questions 1 et 2.

Exercice 3 ⋄ (ordre de convergence de formules de quadrature composées). Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Le but de cet exercice est de mesurer l'efficacité de formules de quadrature de Newton–Cotes composées classiques pour l'approximation de l'intégrale définie

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pour différents choix de fonction, et l'influence de la régularité de la fonction sur la vitesse de convergence de la méthode.

1. Écrire trois fonctions, ayant chacune pour paramètres d'entrée la fonction f, les bornes a et b, et un nombre $m \geq 1$ de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$, calculant une approximation $I_{m,n}(f)$ de $I(f)$ respectivement par les formules de quadrature de la règle du point milieu (formule ouverte, $n = 0$), de la règle du trapèze (formule fermée, $n = 1$) et de la règle de Simpson (formule fermée, $n = 2$) composées.
2. Au moyen de la commande `semilogy`, tracer le graphe des courbes de l'erreur $|I(f)-I_{m,n}(f)|$ de chacune de ces trois formules en fonction du nombre de sous-intervalles pour $f(x) = e^x$, $a = 0$ et $b = 1$. Commenter les résultats.
3. Reprendre la question précédente pour $f(x) = \left|3\,x^4 - 1\right|$. Que constate-t-on ? Comment procéder pour retrouver les ordres de convergence théoriques des formules dans ce cas ?

Exercice 4 ⋄ (méthode de Romberg). On considère l'utilisation de la règle du trapèze composée associée à une subdivision dyadique de l'intervalle $[a, b]$ pour le calcul de l'intégrale $I(f)$ de l'exercice précédent. En supposant la fonction f suffisamment régulière et en posant $H = \frac{b-a}{2^k}$, $k \geq 0$, on peut montrer à partir de la formule d'Euler–Maclaurin que

$$I_{2^k,1}(f) = I(f) + b_2\,H^2 + b_4\,H^4 + \dots$$

À partir d'une estimation de l'intégrale pour une subdivision de taille $\frac{H}{2}$, on obtient, grâce au procédé d'extrapolation de Richardson, une meilleure approximation de $I(f)$, fournie par la quantité

$$R(k+1, 1) = R(k+1, 0) + \frac{1}{3}\,(R(k+1, 0) - R(k, 0)) = \frac{1}{3}\,(4\,R(k+1, 0) - R(k, 0))\,,$$

où l'on a posé $R(k, 0) = I_{2^k,1}(f)$ et $R(k+1, 0) = I_{2^{k+1},1}(f)$, et qui est d'ordre quatre en H. La méthode de Romberg pour l'évaluation approchée de $I(f)$ consiste simplement en l'application répétée de cette opération à partir de la valeur $k = 0$.

Écrire une fonction `romberg`, ayant pour arguments d'entrée une fonction f, les bornes a et b, un nombre d'extrapolations maximal N et une tolérance ε, renvoyant la valeur de l'approximation $R(k, k)$ telle que $|R(k, k) - R(k-1, k-1)| \leq \varepsilon$, avec $0 \leq k \leq N$, ou bien $k = N$. Pour cela, on construira un tableau des valeurs extrapolées $R(k, m)$, $0 \leq m \leq k \leq N$, dont les éléments satisfont la relation de récurrence

$$R(k, m) = \frac{1}{4^m - 1}\,(4^m\,R(k, m-1) - R(k-1, m-1))\,, 1 \leq m \leq k \leq N,$$

et dont la première colonne est telle que $R(k, 0) = I_{2^k,1}(f)$, $k = 0, \dots, N$.