

feuille de travaux pratiques

Séance 5 : résolution numérique de systèmes linéaires

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel. Le travail demandé peut être effectué indifféremment avec MATLAB ou le logiciel libre GNU OCTAVE (<http://www.gnu.org/software/octave/>).

Avant de commencer, télécharger l'archive contenant les fichiers nécessaires à la séance de travaux pratiques à l'adresse

http://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/tp/tp_systemes.tgz
puis extraire les fichiers en question.

Exercice 1 (utilisation des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi, d'après A. Quarteroni). Soit n un entier naturel non nul et ε un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. On considère le système linéaire, d'ordre n , $A_\varepsilon \mathbf{x} = \mathbf{b}_\varepsilon$, dans lequel

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \varepsilon \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_\varepsilon = A_\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La commande `[A,b]=matrix(n,epsilon)`, faisant appel à une fonction présente dans l'archive téléchargée, permet de construire les tableaux associés à la matrice A_ε et au vecteur $\mathbf{b}_\varepsilon$ pour des valeurs de l'entier n et du réel ε données. On pose dans un premier temps $n = 5$.

1. On sait que si la matrice A_ε est à diagonale strictement dominante par lignes, alors la méthode de Gauss–Seidel, appliquée à la résolution du système linéaire $A_\varepsilon \mathbf{x} = \mathbf{b}_\varepsilon$, converge.
 - a. Vérifier que A_ε est à diagonale strictement dominante par lignes lorsque l'on fixe $\varepsilon = 0, 3$.
 - b. Après avoir complété et renommé le fichier `methiter.m` contenu dans l'archive pour obtenir une fonction nommée `gaussseidel` mettant en œuvre la méthode de Gauss–Seidel, calculer une solution approchée du système, avec une tolérance pour le critère d'arrêt égale à 10^{-10} et le vecteur $\mathbf{x}^{(0)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ pour initialisation. Noter le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir cette solution.
 - c. De la même manière, compléter et renommer le fichier `methiter.m` pour obtenir une fonction nommée `jacobi` mettant en œuvre la méthode de Jacobi.
2.
 - a. Tracer le graphe des valeurs des rayons spectraux respectifs des matrices d'itération des méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel associées à A_ε en fonction de celle du paramètre ε , pour $\varepsilon = 0, 0, 1, 0, 2, \dots, 1$.
 - b. Que dire de la convergence des deux méthodes en fonction de la valeur de ε ?
 - c. Quelle méthode choisir pour résoudre le système dans le cas où $\varepsilon = 0, 5$? Utiliser la méthode sélectionnée et comparer le nombre d'itérations nécessaires à celui observé en 2.b.. Quelle explication donner à la différence constatée?

- On pose à présent $n = 100$. Pour $\varepsilon = 0,3$ et $\varepsilon = 0,35$, tracer (en utilisant la commande `semilogy`) et comparer les graphes de la norme du résidu $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b}_\varepsilon - A_\varepsilon \mathbf{x}^{(k)}$ en fonction du nombre d'itérations $1 \leq k \leq 50$ pour la méthode de Jacobi. Commenter en particulier la pente des courbes. Dans le cas où $\varepsilon = 0,35$, estimer à partir du graphe le nombre d'itérations nécessaires pour que la norme du résidu soit plus petite que 10^{-10} .

Exercice 2 (influence des erreurs d'arrondi). Le but de cet exercice est de mettre en évidence les problèmes, liés aux erreurs d'arrondi dans les calculs, apparaissant dans certaines méthodes numériques, notamment pour la résolution de systèmes linéaires. On considère pour cela H , la matrice de Hilbert d'ordre n (obtenue en entrant la commande `H=hilb(n)`).

- Poser $n = 10$ et choisir un vecteur non nul $\mathbf{x}_0$ de $\mathbb{R}^n$ (par exemple en entrant la commande `x0=ones(10,1)`). Calculer ensuite le vecteur $\mathbf{b} = H\mathbf{x}_0$.
- Résoudre alors le système $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en inversant la matrice H . Que constate-t-on ? Comparer précisément la solution obtenue $\mathbf{x}$ avec $\mathbf{x}_0$ en calculant la quantité

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2}{\|\mathbf{x}_0\|_2}$$

appelée erreur relative sur la valeur de $\mathbf{x}$.

- L'erreur relative dépend-elle fortement du choix du vecteur $\mathbf{x}_0$?
- Écrire une fonction nommée `errrel` prenant comme argument d'entrée l'ordre n de la matrice de Hilbert et renvoie la valeur correspondante de l'erreur relative. Tracer ensuite son graphe.

Exercice 3 $\diamond$ (analyse de la perturbation des données). On cherche à résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 & 0,001 & 0,0001 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1,5 & 2,25 & 3,375 & 5,0625 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 1 \\ 2,25 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- Écrire une fonction nommée `gauss`, prenant comme arguments d'entrée la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$, basée sur la méthode d'élimination de Gauss (sans ou avec échange) pour la résolution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Elle renverra en sortie le vecteur solution $\mathbf{x}$.
- Utiliser cette fonction pour calculer la solution $\mathbf{y}$ du système perturbé $(A + \delta A)\mathbf{y} = \mathbf{b}$, où δA est une matrice définie aléatoirement au moyen de la fonction `rand`, et évaluer la quantité

$$\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} \frac{\|A\|_2}{\|\delta A\|_2}.$$

- Utiliser cette fonction pour calculer la solution $\mathbf{z}$ du système perturbé $A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$, où $\delta \mathbf{b}$ est un vecteur défini aléatoirement, et évaluer la quantité

$$\frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{z}\|_2} \frac{\|\mathbf{b}\|_2}{\|\delta \mathbf{b}\|_2}.$$

- Soit D la matrice diagonale obtenue à partir de la matrice A en entrant la commande `D=diag(diag(A))`. On pose $B = D^{-1}A$, $\mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$, et on considère le système linéaire $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Reprendre les questions 2. et 3. avec $\delta B = D^{-1}\delta A$ et $\delta \mathbf{c} = D^{-1}\delta \mathbf{b}$. Qu'en conclure ?