Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux pratiques

Séance 6 : calcul de valeurs et de vecteurs propres

Le symbole $\diamond$ indique un exercice optionnel. Le travail demandé peut être effectué indifféremment avec Matlab ou le logiciel libre GNU Octave (`http://www.gnu.org/software/octave/`).

Exercice 1 (méthode de la puissance). La méthode de la puissance est une méthode itérative très simple fournissant des approximations de la[1] valeur propre de plus grand module d'une matrice (on parle de valeur propre dominante) et d'un vecteur propre associé.

Soit A une matrice d'ordre n que l'on suppose diagonalisable. On note λ_i, $1 \leq i \leq n$ ses valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités respectives et ordonnées de la manière suivante

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|,$$

et l'on désigne par $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base de vecteurs propres associés. On suppose de plus que λ_n a une multiplicité algébrique égale à un et qu'elle est la seule valeur propre de plus grand module. Dans toute la suite, on note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$.

La méthode de la puissance pour calculer λ_n consiste en l'algorithme suivant.

- **Initialisation :**
  choisir $\boldsymbol{q}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{q}^{(0)}\|_2 = 1$,
- **Itérations :**
  pour $k \geq 1$
  $$\boldsymbol{z}^{(k)} = A\boldsymbol{q}^{(k-1)},$$
  $$\boldsymbol{q}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{z}^{(k)}}{\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|_2},$$
  $$\nu^{(k)} = (\boldsymbol{q}^{(k)})^* A\boldsymbol{q}^{(k)}.$$

En supposant que le vecteur $\boldsymbol{q}^{(0)}$ n'est pas contenu dans le sous-espace engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres autres que la valeur propre dominante λ_n, on montre que la suite des vecteurs $(\boldsymbol{q}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et la suite des quotients de Rayleigh $(\nu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers un vecteur colinéaire à $\boldsymbol{v}_n$ et vers λ_n lorsque k tend vers l'infini, la convergence étant d'autant plus rapide que le quotient $|\lambda_{n-1}/\lambda_n|$ est petit.

1. Proposer un critère d'arrêt pour les itérations de l'algorithme de la méthode de la puissance introduit plus haut.
2. Écrire une fonction `[lambda,v,iter]=puissance(A,q0,tol,nmax)` mettant en œuvre l'algorithme de la méthode de la puissance ainsi obtenu, les paramètres d'entrée `tol` et `nmax` représentant respectivement la tolérance pour le critère d'arrêt et le nombre maximum d'itérations à effectuer, les paramètres en sortie `lambda`, `v` et `iter` contenant respectivement la suite des valeurs $\nu^{(k)}$ calculées, l'approximation d'un vecteur propre associé à la valeur propre dominante et le nombre d'itérations qui ont été nécessaires pour satisfaire le critère d'arrêt en cas de convergence.
3. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On ne considèrera pas ici de matrices possédant plusieurs valeurs propres dominantes et pour lesquelles un traitement spécifique est requis.

a. Utiliser la fonction `puissance` pour rechercher la valeur propre dominante de A, ainsi qu'un vecteur propre associé, en prenant le vecteur $\boldsymbol{q}^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T/\sqrt{3}$ comme initialisation et une tolérance égale à 10^{-8} pour le critère d'arrêt.

b. Valider le résultat obtenu en utilisant la commande `eig`.

4. On souhaite à présent évaluer l'influence de la condition initiale sur la convergence de la méthode sur un exemple. On considère pour cela la matrice réelle symétrique

$$B = \begin{pmatrix} 0,5172 & 0,5473 & -1,224 & 0,8012 \\ 0,5473 & 1,388 & 1,353 & -1,112 \\ -1,224 & 1,353 & 0,03642 & 2,893 \\ 0,8012 & -1,112 & 2,893 & 0,05827 \end{pmatrix}.$$

a. Pour chacune des trois initialisations qui suivent, tracer sur une même figure les termes de la suite $\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|_2$ en fonction de k : $\boldsymbol{q}^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T/\sqrt{4}$ et $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T/\sqrt{2}$.

b. Utiliser la commande `eig` pour obtenir les valeurs propres de B. Commenter alors les trois courbes obtenues à la question précédente en tentant de donner des explications.

Exercice 2 $\diamond$ (méthode de la puissance inverse). La méthode de la puissance inverse permet d'obtenir une approximation de la valeur propre d'une matrice A la plus proche d'un nombre $\mu \in \mathbb{C}$ donné n'appartenant pas au spectre de A, en appliquant la méthode de la puissance à la matrice ${M_\mu}^{-1} = (A - \mu I)^{-1}$. Bien que plus coûteuse que la méthode de la puissance (elle nécessite en effet de résoudre un système linéaire à chaque itération de l'algorithme[2]), la méthode de la puissance inverse a l'avantage de pouvoir converger vers n'importe quelle valeur propre de A et se prête donc bien au raffinement d'une approximation d'une valeur propre, obtenue, par exemple, par une technique de localisation.

1. Sur le modèle de la fonction `puissance` de l'exercice 1, écrire une fonction `[lambda,v,iter]= puissanceinv(A,q0,mu,tol,nmax)` mettant en œuvre la méthode de la puissance inverse, le paramètre d'entrée `mu` étant l'approximation initiale de la valeur propre que l'on souhaite approcher. On utilisera la commande `lu` pour calculer la factorisation LU de la matrice M_μ et, pour résoudre les systèmes triangulaires associés à cette factorisation, les fonctions `forwardcol` et `backwardcol` fournies dans l'archive disponible à l'adresse suivante : `http://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/tp/tp_eigenvalues.tgz`.
2. Utiliser la fonction `puissanceinv` pour calculer la valeur propre de plus petit module de la matrice A de l'exercice précédent, en prenant $\boldsymbol{q}^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T/\sqrt{3}$ comme initialisation et une tolérance égale à 10^{-8} pour le critère d'arrêt.

2. En pratique, on calcule une fois pour toute la factorisation LU de la matrice M_μ, ce qui permet de ne plus avoir ensuite qu'à résoudre deux systèmes triangulaires à chaque itération de la méthode.