Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2013/2014

feuille de travaux pratiques

Séances 7 et 8 : résolution d'équations non linéaires

Le symbole ⋄ indique un exercice optionnel. Le travail demandé peut être effectué indifféremment avec Matlab ou le logiciel libre GNU Octave (`http://www.gnu.org/software/octave/`).

Avant de commencer, télécharger l'archive contenant les fichiers nécessaires à la séance de travaux pratiques à l'adresse

`http://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/tp/tp_nonlineaire.tgz`

puis extraire les fichiers en question.

Exercice 1 (méthodes de dichotomie et de Newton–Raphson, *d'après A. Quarteroni*). Dans cet exercice, on souhaite utiliser sur des exemples différentes méthodes d'approximation d'un zéro d'une fonction.

1. On considère tout d'abord la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, en observant qu'elle y possède deux zéros.

   a. Créer une fonction dite anonyme pour f en entrant la commande : `f=@(x) (x/2-sin(x) +pi/6-sqrt(3)/2)`.

   b. À l'aide du graphe de la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, expliquer pourquoi la méthode de dichotomie ne peut être utilisée que pour approcher l'un des deux zéros de f, que l'on notera ξ dans la suite.

   c. Compléter les lignes manquantes du fichier `dichotomie.m` afin d'obtenir une fonction `[zero,iter,res,inc]=dichotomie(f,a,b,tol,nmax)` mettant en œuvre la méthode de dichotomie pour l'approximation d'un zéro d'une fonction f donnée, compris dans un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$. Les autres paramètres d'entrée `tol` et `nmax` de la fonction `dichotomie` sont respectivement la tolérance pour le critère d'arrêt de la méthode et le nombre maximum d'itérations à effectuer, les paramètres de sortie `zero`, `iter`, `res` et `inc` étant pour leur part l'approximation du zéro obtenue, le nombre d'itérations nécessaire au calcul de cette approximation, la valeur de la fonction f en ce point et un vecteur contenant la suite des valeurs absolues des différences entre deux approximations successives (dite suite des incréments).

   d. Utiliser la fonction `dichotomie` pour calculer une approximation de ξ avec une tolérance égale à 10^{-10} pour le critère d'arrêt à partir du choix d'un intervalle $[a, b]$ convenable.

   e. Au moyen de la commande `semilogy`, tracer le graphe de la suite des incréments $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ (en fonction de k) avec une échelle semilogarithmique et déterminer la loi selon laquelle ces quantités tendent vers 0 quand k tend vers l'infini.

   f. Compléter les lignes manquantes du fichier `newton.m` afin d'obtenir une fonction `[zero, iter,res,inc]=newton(f,df,x0,tol,nmax)` qui met en œuvre la méthode de Newton–Raphson pour l'approximation d'un zéro d'une fonction dérivable f donnée. Les paramètres d'entrée `df`, `x0`, `tol` et `nmax` représentent respectivement le nom de la fonction anonyme correspondant à la fonction f', l'initialisation de la méthode, la tolérance pour le critère d'arrêt de la méthode et le nombre maximum d'itérations à effectuer. En sortie, les paramètres sont identiques à ceux de la fonction `dichotomie`.

   g. Calculer des approximations des deux zéros ξ et ζ de la fonction f avec la méthode de Newton–Raphson, en prenant une tolérance égale à 10^{-10} pour le critère d'arrêt et comme initialisation le point π pour ξ et $-\frac{\pi}{2}$ pour ζ. Comparer les nombres d'itérations effectuées pour obtenir une approximation de chacun des zéros. Pourquoi sont-ils très différents ? Comparer également les graphes des suites des incréments obtenus avec la commande `semilogy`.

   h. On cherche à réduire le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention d'une approximation du zéro négatif ζ de la fonction f. La méthode de Newton–Raphson modifiée, basée sur la modification suivante de la relation de récurrence de la méthode de Newton–Raphson

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},$$

   a une convergence quadratique si $f'(\zeta) = 0$. Mettre en œuvre cette méthode dans une fonction `modnewton` et observer combien d'itérations sont nécessaires pour qu'elle fournisse une approximation de ζ avec une tolérance égale à 10^{-10} pour le critère d'arrêt.

2. On considère à présent la fonction $g(x) = x + e^{-20\,x^2}\cos(x)$, dont on veut approcher les zéros par la méthode de Newton–Raphson.

   a. Créer une première fonction anonyme pour g, en entrant la commande : `g=@(x) (x+exp(-20*x.^2).*cos(x))`, puis une seconde pour sa dérivée g'.

   b. Utiliser la fonction `newton` pour essayer d'approcher d'un zéro de g en prenant $x^{(0)} = 0$ pour initialisation et une tolérance égale à 10^{-10} pour le critère d'arrêt.

   c. Tracer le graphe de g sur l'intervalle $[-1, 1]$ et tenter de donner une explication qualitative du fait la méthode de Newton–Raphson ne converge pas avec l'initialisation précédente.

   d. Appliquer cinq intérations de la méthode de dichotomie à la fonction g sur l'intervalle $[-1, 1]$ et utiliser le point obtenu comme initialisation de la méthode de Newton–Raphson pour la recherche d'un zéro de g.

3. Renommer et modifier le fichier `dichotomie.m` pour obtenir, sur le même modèle, une fonction `regulafalsi` mettant en œuvre la méthode de la fausse position [1]. De la même manière, écrire une fonction qui met en œuvre la méthode de la sécante [2] à partir du fichier `newton.m`.

Exercice 2 (calcul de $\sqrt{2}$). Dans cet exercice, on cherche à calculer une approximation de $\sqrt{2}$ de diverses façons.

1. On peut tout d'abord obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en cherchant la racine positive du polynôme $f(x) = x^2 - 2$. Pour cela, appliquer successivement à f les méthodes de dichotomie, de la fausse position, de Newton–Raphson et de la sécante sur l'intervalle $[1, 2]$ et déterminer celles qui convergent.

2. On peut également se servir de méthodes de point fixe, définies à partir des applications suivantes

$$g_1(x) = 2 + x - x^2,\ g_2(x) = \frac{2}{x} \text{ et } g_3(x) = \frac{x+2}{x+1},$$

   considérées sur l'intervalle $[1, 2]$.

   a. Parmi les trois fonctions ci-dessus, lesquelles conduisent à une méthode de point fixe convergente ?

---

1. On rappelle que, pour cette méthode, l'approximation du zéro à l'itération k $x^{(k)}$ est donnée par l'abscisse de l'intersection de la droite passant par les points $(a^{(k)}, f(a^{(k)}))$ et $(b^{(k)}, f(b^{(k)}))$ avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire

$$x^{(k)} = a^{(k)} - \frac{a^{(k)} - b^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})} f(a^{(k)}).$$

2. On rappelle que la méthode de la sécante peut être obtenue à partir de la méthode de Newton–Raphson en remplaçant la quantité $f'\left(x^{(k)}\right)$ apparaissant dans la relation de récurrence par le quotient $\frac{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}{x^{(k)} - x^{(k)-1}}$. L'initialisation de cette méthode nécessite donc deux points distincts, $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$, si possible proches du zéro recherché.

b. Vérifier ces affirmations en calculant les 20 premiers termes des suites définies par les relations de récurrence

$$x^{(0)} = \frac{1}{2},\ x^{(k+1)} = g_i(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N},\ i \in \{1,2,3\}.$$

Exercice 3 $\diamond$ (ordres de convergence). On considère les fonctions

$$f(x) = 3\cos(x) - 2\ln(x+1) - 1,\ g(x) = 2x - 1,\ h(x) = (2x-1)^3 \text{ et } k(x) = (2x-1)^5.$$

1. Calculer les dérivées de chacune de ces fonctions.
2. Comparer le nombre d'itérations nécessaires aux méthodes de dichotomie, de la fausse position, de Newton–Raphson et de la sécante pour obtenir le zéro, compris entre 0 et 1, de ces fonctions, en prenant une tolérance égale à 10^{-5} pour les critères d'arrêt des méthodes.
3. Pour chacune des fonctions f, g et h et pour chacune des méthodes utilisées dans la question précédente, représenter graphiquement les premiers termes de la suite $\left(\frac{\ln|x^{(k+1)}-\xi|}{\ln|x^{(k)}-\xi|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction de k, où ξ est le zéro de la fonction considérée [3] et $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des approximations de ξ produites par la méthode considérée. Déterminer à partir de ces graphes les ordres de convergence respectifs des méthodes.

Exercice 4 $\diamond$ (bassins de convergence de la méthode de Newton–Raphson). On s'intéresse à la recherche des solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$ par la méthode de Newton–Raphson. On considère pour cela la fonction d'une variable complexe $f(z) = z^3 - 1$, qui s'annule en chaque point z du plan complexe tel que $z^3 = 1$.

1. Créer deux fonctions anonyme `f` et `df` renvoyant respectivement les valeurs de f et de f' en un point quelconque de $\mathbb{C}$.
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit une grille de pas $h = \frac{3}{n-1}$ couvrant le carré $[-1,5, 1,5] \times [-1,5\mathrm{i}, 1,5\mathrm{i}]$. Écrire un programme résolvant, pour une valeur donnée de n, l'équation $f(z) = 0$ avec une tolérance égale à 10^{-4} par la méthode de Newton–Raphson [4] initialisée successivement en chaque point de la grille $z_{ij} = -1,5(1+\mathrm{i}) + (i + j\mathrm{i})h$, $0 \leq i, j \leq n$. Pour chaque couple (i,j), stocker dans le tableau à deux dimensions `nrac` le numéro k ($k = 1$, 2 ou 3) de la racine cubique complexe de l'unité $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ vers laquelle la méthode aura convergée à partir de z_{ij} (en posant $k = 4$ lorsque la méthode n'a pas convergé après `nmax=100` itérations) et dans le tableau `niter` le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence (en stockant le nombre maximal d'itérations autorisées `nmax` en l'absence de convergence).
   Pour automatiser le processus de reconnaissance de la racine approchée par la valeur `zero` retournée, on pourra utiliser les instructions suivantes (ci-dessous, `racines` désigne un tableau contenant les trois racines cubiques complexes de l'unité et `tol` est la tolérance du critère d'arrêt de la méthode de Newton–Raphson) :
   ```
   d=racines-[zero zero zero];
   [m,k]=min(d);
   if (abs(m)>tol)
      k=4;
   end
   ```
3. À l'aide de la commande `imagesc`, afficher une représentation de chacun des tableaux `nrac` et `niter` obtenus pour $n = 100$.
4. Refaire des tracés pour des pas de grille plus petits (*i.e.*, de plus grandes valeurs de n). Que dire des « frontières » des trois bassins de convergence de la méthode ?

3. On pourra éventuellement obtenir une approximation de ξ en utilisant la commande `fsolve`.
4. On pourra pour cela utiliser la fonction `newton` écrite à l'exercice 1.