1. Logique. Ensembles. Applications.

Exercice 1.1. Montrer les théorèmes de logique suivants:

a) $(p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \Longleftrightarrow ((p \text{ et } q) \Longrightarrow r)$.

b) $((p \text{ ou } q) \Longrightarrow r) \Longleftrightarrow ((p \Longrightarrow r) \text{ et } (q \Longrightarrow r))$.

Exercice 1.2. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes, ces propositions sont-elles vraies ? Ecrire à l'aide de quantificateurs la négation de ces propositions.

a) Le carré de tout nombre réel est positif.

b) Trouver un entier non nul est la somme de deux carrés de nombres entiers.

c) Un nombre entier divisible par 10 est divisible par 5.

d) Il existe un nombre impair divisible par 2.

e) Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si ces deux nombres réels sont de même signe.

Exercice 1.3. Soit $A = \{2, 3, 4\}$. Traduire les énoncés suivants en français. Décider, quand cela est possible s'ils sont vrais ou faux. Ecrire leurs négations.

a) $x \in A$.

b) $\forall\ x \in \mathbb{N}\ \ x \in A$.

c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \ x \in A$.

d) $x \in A \Longrightarrow x \in \mathbb{N}$.

e) $\forall\ x\ (\ x \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in A)$.

f) $\exists x\ (x \in A\ \text{ et }\ \forall y\ (y \in A \Longrightarrow y \leq x))$.

g) $\forall\ x\ \forall\ x'\ \ ((P(x)\ \text{ et }\ P(x'))\ \Longrightarrow x = x'$, avec $P(x) = x \in A\ \text{ et }\ \forall y\ (y \in A \Longrightarrow y \leq x))$.

Exercice 1.4. Soit f_1, f_2 et f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation. Illustrer chaque propriété et sa négation par un graphique.

a) $\forall i \in \{1, 2, 3\}\ \exists a \in \mathbb{R}\ f_i(a) = 1$.

b) $\exists i \in \{1, 2, 3\}\ \forall a \in \mathbb{R}\ \ f_i(a) = 1$.

c) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, 2, 3\}\ \ f_i(a) = 1$.

d) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, 2, 3\}\ \ f_i(a) = 1$.

Exercice 1.5. Soient X, Y, Z des parties d'un ensemble E. Vérifier que :

a) $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cap (X - Z)$, b) $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$

Exercice 1.6. Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Vérifier que

a) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, b) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Exercice 1.7. Soient X, Y, Z des parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions :

a) $A_1 = X \cap (\overline{X} \cup Y)$ b) $B_1 = X \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y} \cup Z)$

c) $A_2 = X \cup (\overline{X} \cap Y)$ d) $B_2 = X \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y} \cap Z)$

Exercice 1.8. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$(A \cup C \subset A \cup B \text{ et } A \cap C \subset A \cap B) \Longrightarrow C \subset B.$$

Exercice 1.9. Les énoncés suivants sont-ils vrais(les variables A, B, C désignent des sous-ensembles d'un ensemble donné E)?

a) $\forall\ A\ \forall\ B\ \forall\ C\quad A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C$.

b) $\forall\ A\ \forall\ B\quad E - A = E - B \Longrightarrow A = B$.

Exercice 1.10. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C),$$
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

Exercice 1.11. Soient X, Y, Z, X', Y', Z' des sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose que

$$X \cup Y \cup Z = E$$
$$X \cap Y = X' \cap Y',\ X \cap Z = X' \cap Z',\ Y \cap Z = Y' \cap Z'$$
$$X \subset X',\ Y \subset Y',\ Z \subset Z'.$$

Montrer que $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$.

Exercice 1.12. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Comparer les ensembles:

a) $[0,1]$ et $f^{-1}(f([0,1]))$,

b) $[-1,1]$ et $f(f^{-1}([-1,1]))$,

c) $f([0,1]\cap[-1,0[)$ et $f([0,1])\cap f([-1,0[)$.

Exercice 1.13. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=\cos x$. Décrire les ensembles:

a) $f([-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}])$, b) $f^{-1}(f([-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]))$, c) $f^{-1}(]1,+\infty[)$, d) $f(f^{-1}(]1,+\infty[))$,

e) $f^{-1}([1,+\infty[)$, f) $f(f^{-1}([1,+\infty[))$, g) $f^{-1}([1/2,+\infty[)$, h) $f(f^{-1}([1/2,+\infty[))$.

Exercice 1.14. Soit $E=\mathbb{R}-\{0,1\}$ et les applications définies par:

$$\begin{aligned} f: E &\to E \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g: E &\to E \\ x &\mapsto 1-\frac{1}{x} \end{aligned}.$$

Montrer que f et g sont bijectives. Comparer $f\circ g$ et $g\circ f$. Calculer f^2 et g^2.

Exercice 1.15.

$$\text{Soit } \begin{aligned} f: \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g: \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.

b) Préciser $g\circ f$ et $f\circ g$.

Exercice 1.16. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y)=(x-y,-2x+2y)$.

a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, montrer que $(a,b)\in f(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $2a+b=0$.

b) L'application f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 1.17. Soient X, Y, Z trois ensembles, $f:X\to Y$ et $g:Y\to Z$ deux applications et $h=g\circ f$ l'application composée. Montrer que

a) si h est injective, f est injective; si de plus f est surjective alors g est injective.

b) si h est surjective, g est surjective; si en outre g est injective alors f est surjective.

Exercice 1.18. Soit $f : X \to Y$ une application et $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de X. Montrer que l'on a

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

et si f est injective

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

Exercice 1.19. Soit $f : X \to Y$ une application et $(B_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de Y. Montrer que l'on a

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Exercice 1.20. Soit $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant $(1+X)^{2n}(1-X)^{2n} = (1-X^2)^{2n}$, montrer :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n (C_{2n}^n).$$

Exercice 1.21. Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$.

En développant $(1+X+X)^n$ de deux façons différentes, montrer :

$$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

2. Nombres complexes.

Exercice 2.1. Mettre sous forme cartésienne des nombres complexes suivants:

$(2-3i)(1+i)$, $\quad \dfrac{5+2i}{1-2i}$, $\quad \dfrac{5-i}{(3-2i)^2}$, $\quad (1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2$,

$\left(\dfrac{2+i}{1-2i}\right)^n$, $\quad \dfrac{a}{a+ib}$, $\quad \dfrac{a+ib}{b+ia}$, $(a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$.

Exercice 2.2. Mettre sous forme polaire des nombres complexes suivants:

a) $1+i\sqrt{3}$, $\ 1-i$ et $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$.

b) $(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n$ et $(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

c) $(1+ie^{ia})^n$ avec $a\in[0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2.3. Ecrire sous forme polaire des nombres complexes suivants:

$1+\cos\varphi-i\sin\varphi$, $\quad (1+i\tan\varphi)^2$, $\quad \dfrac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\sin\varphi-i\cos\varphi}$.

$z+z^2$ si $z=e^{i\theta}$, $\quad \dfrac{a+b}{1+ab}$ si $|a|=1$ et $|b|=1$.

Exercice 2.4. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants:

$-3+4i$, $\quad 1+i$, $\quad 1-i\sqrt{3}$, $\quad \dfrac{1+i}{1-i}$.

Exercice 2.5. Trouver les racines carrées de $3-4\,i$ et de $24-10\,i$, puis les racines quatrièmes de 81 et de -81.

Exercice 2.6. Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique les racines carrées de $\sqrt{3}+i$. En déduire les lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2.7. On appelle racine n-ième de l'unité ($n\geq 1$), tout complexe w solution de l'équation $w^n=1$.

a) Déterminer les solutions w_k de cette équation.

b) Calculer la somme S des racines n-ièmes de l'unité : $S = \sum_{k=0}^{n-1} w_k$.

c) Calculer la somme S_p des puissances p-ièmes de ces racines (p entier naturel):

$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} (w_k)^p$.

d) Déduire de la première question les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$\left(1 + i\frac{z}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{z}{n}\right)^n = 0.$$

Exercice 2.8. Résoudre sur $\mathbb{C}$,

a) $z^2 - (2+i)z + (i+7) = 0$. b) $(1-i)z^2 - (6-4i)z + 9 - 7i = 0$.

c) $z^4 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3} - i}$ d) $z^4 - 2iz^2 - 5 = 0$. e) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 = 0$.

Exercice 2.9. Résoudre sur $\mathbb{C}$,

a) $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b) $z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$ sachant qu'il y a un zéro réel et zéro imaginaire pur.

c) $(z^2 - 8z)^2 + 40(z^2 - 8z) + 375 = 0$,

d) $z^3 + 3z - 2i = 0$.

Exercice 2.10. On considère l'équation (E):

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que si z est solution de (E) alors $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$. En déduire que toutes les solutions de (E) sont réelles.

2) Résoudre (E) dans le cas $a = 1$.

Exercice 2.11. Soit n entier naturel non nul et (a, b) un couple de réels.

Calculer $A = \sum_{0}^{n-1} \cos(a + kb)$, $B = \sum_{0}^{n-1} \sin(a + kb)$ et $C = \sum_{0}^{n} C_n^k \cos(a + kb)$.

Exercice 2.12. Calculer $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 2.13. Linéariser $\cos^4 x$, $\sin^4 x$, $\cos^5 x$, $\sin^5 x$, $\cos^6 x$, $\sin^6 x$ et $\sin^3 x \cos^2 x$.

3. Fonctions réelles.

Exercice 3.1. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe un point x de $[0,1]$ tel que $f(x) = x$ (Un tel point est un point fixe de f).

Indication: on utilisera la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

Exercice 3.2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. Montrer que

$$\exists\, x \in [0,1], \quad f(x+\frac{1}{2}) - f(x) = 2.$$

Indication: on utilisera la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x) - 2$.

Exercice 3.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(f(x_0)) = x_0.$$

Montrer que

$$\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1) = x_1.$$

Exercice 3.4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \ \exists\, x_n \in [0,1], \quad f(x_n + \frac{1}{n}) = f(x_n).$$

Exercice 3.5. Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 10$.

a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

b) Démontrer que $f(x) = 0$ pour un certain réel $x \in]1,2[$.

c) Calculer la valeur de ce réel x.

Exercice 3.6.

1) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Montrer f s'annule sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.

Exercice 3.7. Montrer que si f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)$$

alors f est constante.

Indication: vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Exercice 3.8. a) Prouver que $g(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ est strictement décroissante sur $[0, 9]$.

b) g admet-elle une fonction réciproque (ou inverse)?

Exercice 3.9. Démontrer :

$$\operatorname{Arc}\cos x + \operatorname{Arc}\cos(-x) = \pi \quad \text{pour } x \in [-1, 1].$$

$$\operatorname{Arc}\sin x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } x \in]-1, 1[.$$

$$\cos(\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.10. Etablir que

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ x + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } x > 0.$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ x + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } x < 0.$$

Exercice 3.11. Déterminer une expression simplifiée des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \cos^2(\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\cos x),$$

$$g : x \mapsto \sin^2(\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\cos x).$$

Exercice 3.12. Démontrer :

$$\operatorname{Arc}\cos x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{pour } x \in]0,1].$$

$$\operatorname{Arc}\cos x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \pi \quad \text{pour } x \in [-1,0[.$$

Exercice 3.13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ 2x + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ 3x = -\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3.14. En appliquant la formule des accroissements finis sur $[x, x+1]$ à la fonction ln, montrer que:

$$\forall\ x > 0, \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

En déduire:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

Exercice 3.15. Montrer que pour tout réel x, on a $\mid e^x - x - 1 \mid \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Justifier l'inégalité sur $\mathbb{R}_+^*$ $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

Exercice 3.16. Utiliser la règle de l'Hospital pour déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 5^x}{5x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{1 - \cos 4x}$

g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ x - \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\ a}$, $(a > 0)$

Exercice 3.17. Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par : $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ (a et b sont des réels, n un entier naturel non nul)

En utilisant le cas $a = b$, en déduire la valeur de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

Exercice 3.18. Calculer la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = x^{n-1} \ln\,(1+x) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 3.19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\, e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ où } P_n \text{ est un polynôme à coefficients réels.}$$

2) En déduire les calculs de $P_1,\ P_2,\ P_3$ et que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Si $n \in \mathbb{N}^*$, écrire le développement de Taylor en 0 à l'ordre n de $f(x)$. Conclure que deux fonctions peuvent avoir en un point donné, le même développement de Taylor à tout ordre sans pour autant être égales sur un voisinage de ce point.

Exercice 3.20. Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

1) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ 2) $\dfrac{e^{\frac{x}{1+x}}}{(1+x)^2}$ 3) $(\cos x)^{1+\sin x}$

4) $\ln\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}\ x}{1+\operatorname{tg}\ x}\right)$ 5) $\operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 6) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 3.21. Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1) $\cos(\sin x)$ en 0 à l'ordre 6 2) $\ln(2\cos x + \sin x)$ en 0 à l'ordre 4

3) $e^{\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 3 4) $(\sin x)^x$ en $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 2

6) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 3. 4) $\sin\sqrt{x^2-3\pi^2}$ en 2π à l'ordre 3.

Exercice 3.22. Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{x(2+x)}$ 2) $\dfrac{(1-\cos x)\,\mathrm{Arc}\sin x}{x\,\mathrm{tg}^{\,2}\,x}$ 3) $\dfrac{(1-e^x)\ (1-\cos x)}{x^3+x^4}$

4) $\dfrac{x\ln(1+x)}{(\mathrm{Arc\,tg}\ x)^2}$ 5) $\dfrac{\mathrm{Arc\,tg}\ x-x}{\sin x-x}$ 6) $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ 8) $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 9) $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3.23. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x-x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$ (poser $h=x-1$) 5) $\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$ (poser $h=x-1$)

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x}$ 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\ln(\sin x)}$.

Exercice 3.24. Déterminer le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 2 de :

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}.$$

Exercice 3.25. Déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$f(x)=x^2e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-e\ x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 3.26. Déterminer le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 3 de :

$$f(x)=\mathrm{Arc\,tg}\ \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}.$$

Exercice 3.27. Soit la fonction f définie par:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-2)}.$$

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ f peut s'écrire :

$$f(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

En déduire que la droite (D) d'équation $y = x - \dfrac{2}{3}$ est asymptote.

Exercice 3.28. Etudier la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = x + 2$.

Exercice 3.29.

a) Déterminer le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 2 de :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

b) Que peut-on en déduire pour la branche infinie de la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+x^2}$ correspondant à x tendant vers $+\infty$.

Exercice 3.30. Déterminer les branches infinies de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\Big(\dfrac{1}{x}\Big)} \ \ln\Big(\frac{x}{x+1}\Big)$$

et préciser la position de la courbe f par rapport aux branches infinies.

4. Polynômes.

Exercice 4.1. Effectuer la division euclidienne de :

a) $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$ par $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$,

b) $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ par $B = X^2 - 3X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$,

c) $A = iX^3 - X^2 + (1 - i)$ par $B = (1 + i)X^2 - iX + 3$ dans $\mathbb{C}[X]$,

d) $A = X^3 - X^2 - X$ par $B = X - 1 + 2i$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4.2. Trouver les $a \in \mathbb{R}$ tels que le polynôme $X^2 - aX + 1$ divise le polynôme $X^4 - X + a$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.3. Déterminer le P.G.C.D. des polynômes suivants

$$P = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1,\ Q = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1.$$

Exercice 4.4. Déterminer le P.G.C.D. des polynômes suivants

$$P = X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + X - 1,\ Q = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1.$$

Exercice 4.5. Déterminer le P.G.C.D. des polynômes suivants

$$P = X^5 - X^4 - X^3 + 2X + 2,\ Q = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 9X + 5.$$

Exercice 4.6. Déterminer le P.G.C.D. des polynômes suivants

$$P = X^4 + X^3 + 6X^2 + 4X + 8,\ Q = X^5 + 3X^4 + 7X^3 + 13X^2 + 12X + 4.$$

Exercice 4.7. Soit les deux polynômes suivants $P = X^5 + 1$ et $Q = X^2 + 1$. Montrer qu'ils sont premiers entre eux et déterminer les deux polynômes U et V tels que

$$UP + VQ = 1,\ d^o\ U < d^o\ Q,\ d^o\ V < d^o\ P.$$

Exercice 4.8. Soit les deux polynômes suivants $P = X^3 + 1$ et $Q = X^4 + 1$.

a) Montrer qu'ils sont premiers entre eux.

b) Déterminer les deux polynômes U_0 et V_0 tels que

$$U_0P + V_0Q = 1,\ d^o\ U_0 < d^o\ Q,\ d^o\ V_0 < d^o\ P.$$

c) Déterminer l'ensemble des polynômes U et V tels que

$$UP + VQ = 1.$$

Exercice 4.9. Soit $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$

Déterminer le P.G.C.D. de P et P'.

En déduire la factorisation de P en polynômes irréductibles (diviser $5P$ par P' et puis montrer que le P.G.C.D. admet 2 pour racine simple et 3 pour racine double).

Exercice 4.10. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$.

Déterminer le P.G.C.D. de P et P'.

En déduire la factorisation de P en polynômes irréductibles.

Exercice 4.11. Montrez que i est racine double du polynôme

$$P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$

Factorisez P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.12. Démontrer que le polynôme de $\mathbb{R}[X]$

$$P = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$$

a deux racines doubles et déterminer ces racines.

Exercice 4.13. Factoriser dans $\mathbb{R}\ [X]$ le polynôme :

$$P = 16X^5 - 20X^3 + 5X - 1,$$

sachant qu'il possède au moins une racine multiple.

Exercice 4.14. Factoriser dans $\mathbb{R}\ [X]$ les polynômes :

a) $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$.

b) $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2$.

c) $6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1$.

d) $X^5 + 1$.

Exercice 4.15. Décomposer en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P = X^{2n} - 2\cos\alpha X^n + 1.$$

Exercice 4.16. Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n = (X+1)^n - X^n - 1$ soit divisible par $P = X^2 + X + 1$.

Exercice 4.17. Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n = X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $P = X^2 + X + 1$.

5. Fractions rationnelles.

Exercice 5.1. Décomposer sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$ en éléments simples les fractions rationnelles :

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)}, \quad \frac{X^6-3X^4-3X^2-5}{X^2-4}, \quad \frac{3X^2+X+1}{(X-1)(X^2-4)}, \quad \frac{X^5+3X}{X^4-5X^2+4},$$

$$\frac{1}{X^3+1} \quad \frac{X^2}{(X+1)^3(X-1)^2}, \quad \frac{X^2-X+1}{X^4(X^2+1)^2}, \quad \frac{1}{X^4+X^2+1}.$$

Exercice 5.2. Décomposer sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$ en éléments simples les fractions rationnelles :

$$\frac{1}{X^2-2X\cos\theta+1} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \quad, \frac{X^8-3X^4+2}{(X^4-1)^2} \quad, \frac{X}{(X^2-1)^2}, \quad \frac{X^2+1}{X^4+1}.$$

Exercice 5.3. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{1}{X^n(1-X)} \quad, \frac{1}{X(X+1)^n} \quad, \frac{1}{X^n-1}.$$

Exercice 5.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{2n^3+6n^2+7n+2}{n^2(n+1)^2(n+2)}.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, déterminez la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.