Feuille d'exercices 6

Intégration et calcul de primitives.

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que:
1. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
2. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
3. Si f est T-périodique alors $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)dt = 2\int_{0}^{T} f(t)dt$.

Exercice 2.
En utilisant dans chaque cas un changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes:

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\ t}{1+sin\ t}dt \quad b)\int_1^4 \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt \quad c)\int_0^1 \frac{3t+1}{(t+1)^2}dt \quad d)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t(1+ln^2\ t)}dt$$
$$e)\int_2^e \frac{1}{t\ ln^5\ t}dt \quad f)\int_2^4 \frac{t}{t^2-2t+5}dt \quad f)\int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}dt \quad h)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\ t}{3-2cos\ 2t}dt$$

Exercice 3.
En utilisant la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes:

$$A(t) = \frac{t^3-t^2+3t-2}{t^2-t} \quad B(t) = \frac{t}{t^2-t+1} \quad C(t) = \frac{1}{t(t^2+1)}$$
$$D(t) = \frac{1}{t^4-t^2} \quad E(t) = \frac{t}{(t^2-4)^2} \quad F(t) = \frac{1}{t^4+1}$$

Exercice 4.
Calculer les intégrales suivantes:

$$a)\int_1^e t^n\ ln\ t\ dt \quad b)\int_0^1 (t^3+1)e^{2t}dt \quad c)\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\ sin\ 3t\ dt$$
$$d)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\ t\ dt \quad e)\int_0^1 ln(t^2+1)\ dt \quad f)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 t\ cos^4 t\ dt$$
$$g)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin\ t+cos\ t}dt \quad h)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+sin\ t+cos\ t}dt \quad i)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{7+tan\ t}dt$$

Feuille d'exercices 7

Espaces Vectoriels.

Exercice 1.
1. Ecrire le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs a_k, $k = 1, 2, 3$ avec $v = (1, -2, 5)$, $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 1)$ et $a_3 = (1, 2, 3)$.
2. Pour quelle valeur de k le vecteur $u = (1, -2, k)$ est-il combinaison linéaire de $v = (3, 0, -2)$ et $w = (2, -1, -5)$.
3. Trouver x et y pour que le vecteur $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ où $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Exercice 2.
On considère les familles des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ avec $n = 3$ ou 4:

$$\begin{aligned}
A &= \{a = (2, 3, 4),\ b = (-1, -5, -7),\ c = (3, 1, 1)\} \\
B &= \{a = (1, -1, i),\ b = (-1, i, 1),\ c = (i, 1, -1)\} \\
C &= \{a = (1, 2, -1, 0),\ b = (4, 5, 0, 1),\ c = (2, 1, 2, 1)\} \\
D &= \{a = (2, 6, -3),\ b = (1, 3, -2),\ c = (5, 3, -2),\ d = (3, 9, -5)\}
\end{aligned}$$

Indiquer lesquelles de ces familles sont libres, liées (on donnera les liaisons des vecteurs), génératrices, bases.

Exercice 3.
a. Soit A la famille de $\mathbb{R}^4$ définie par:
$A = \{u_1 = (1, 1, 0, 1),\ u_2 = (2, 1, 3, 1),\ u_3 = (1, 1, 0, 0),\ u_4 = (0, 1, -1, -1)\}$.
Montrer que A est une base de $\mathbb{R}^4$. Trouver les coordonnées du vecteur $u = (0, 0, 0, 1)$ dans cette base.
b. Soit B la famille de $\mathbb{C}^3$ définie par:
$B = \{v_1 = (1 - i, i, 1 + i),\ v_2 = (-1, 1, 3),\ v_3 = (1 - i, i, i)\}$.
Montrer que B est une base de $\mathbb{C}^3$. Trouver les coordonnées du vecteur $v = (1 + i, 2, i)$ dans cette base.

Exercice 4.
Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base.

$$\begin{aligned}
E &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ 3x - y + t = 0\} \\
F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ x - y + 2z + t = 1\} \\
G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\} \\
H &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ \mid x + t \mid = \mid y \mid\}
\end{aligned}$$

Exercice 5.
Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par:
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 4z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y - 2z = 0\}$.
Donner une base de E, F et de $E \cap F$.
Mêmes questions avec les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ définis par:
$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z = 2t\}$.

Exercice 6.
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$u_1 = (-3, 1, 0, 2)$, $u_2 = (-5, 2, 1, 2)$, $u_3 = (1, 1, 4, -6)$ et $u_4 = (-1, 0, -1, 2)$.
a. Montrer que $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle$.
b. Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7.
Sachant que A est une base de $\mathbb{R}^4$, compléter la famille des vecteurs B pour en faire une base de $\mathbb{R}^4$.
$A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}, B = \{(1, 0, 2, 3), (0, 1, -2, -3)\}$
$A = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (5, 1, 11, 0), (-4, 0, -6, 1)\}, B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 3)\}$

Exercice 8.
Sachant que A engendre $\mathbb{R}^3$, en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.
$A = \{(2, 6, -3), (5, 15, -8), (3, 9, -5), (1, 3, -2), (5, 3, -2)\}$
$A = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 5), (1, 1, 3), (1, 2, 1)\}$
$A = \{(1, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 4, 1), (5, 9, 2), (7, 13, 3), (1, 2, 1)\}$

Exercice 9.
a. Déterminer le sous espace vectoriel engendré par A:
$A = \{(1, 2, 1, 0), (3, -4, 5, 6), (2, -1, 3, 3), (-2, 6, -4, -6)\}$
$A = \{(1, 0, 1, 2, -1), (0, 1, -2, 1, 3), (2, 1, , 0, 5, 1), (1, -1, 3, 1, -4)\}$
b. En utilisant les opérations élémentaires sur les vecteurs, donner une base et la dimension de $\langle A\rangle$:
$A = \{(1, 0, 1, -1), (3, -2, 3, 5), (2, -1, 2, 2), (5, -2, 5, 3)\}$
$A = \{(1, 0, 1, 2, -1), (0, 1, -2, 1, 3), (2, 1, 0, 5, 1), (1, -1, 3, 1, -4)\}$
$A = \{(1, 2, 0, 1, 0), (2, 4, 1, 4, 3), (1, 2, 2, 5, -2), (-1, -2, 3, 5, 4)\}$

Feuille d'exercices 3

Equations différentielles linéaires.

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$y^{'} - 2y = 0,\ y^{'} + 2y = t^2 - 2t + 3,\ ty^{'} + y + \ln\, t = 0$$

$$(1+t^2)y^{'} + 4ty = 0,\ 2ty^{'} + y = t^n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$(1-t)y^{'} + y = \frac{t-1}{t},\ y^{'} + y = \frac{1}{1+e^x},\ y^{'} + \cos\, t\ y - \sin \text{ t} \cos \text{ t} = 0$$

Exercice 2.
Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$y^{''} + y^{'} - 6y = 1 - 8t - 30t^2,\ y^{''} + 2y^{'} + y = 2e^{-t}$$

$$y^{''} - 4y^{'} + 4y = (t^2+1)e^t,\ y^{''} - 4y^{'} + 4y = t\text{ch } 2t$$

$$y^{''} - 4y^{'} + y = t\cos\, 2t,\ 2y^{''} + 2y^{'} + y = te^{-t},\ y^{''} + y^{'} = (\ \cos\, t)^3$$

$$y^{''} - 2y^{'} + y = te^t \sin\, t,\ y^{''} - 3y^{'} + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$$

Exercice 3.
Soit (E) l'équation différentielle suivante:

$$ty^{''} + 2(t+1)y^{'} + (t+2)y = 0.$$

En posant $z = xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
On considère l'équation:

$$y^{''} + 2y^{'} + 4y = te^t\ (E)$$

a. Résoudre l'équation différentielle homogène associé à (E).
b. Trouver une solution particulière de (E) puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
c. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
d. Soit $f\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie:

$$t^2 f^{''}(t) + 3tf^{'}(t) + 4f(t) = t\,\ln\, t.$$

• On pose $g(t) = f(e^t)$. Vérifier que g est solution de (E).
• En déduire une expression de f.

Exercice 5.
En utilisant le changement de variable $z = \dfrac{1}{y}$, résoudre l'équation différentielle suivante:

$$x^2 y' + y + y^2 = 0.$$

Exercice 6.
En posant $z = y^2$, résoudre $y'y + y^2 = \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

Feuille d'exercices 4

Fonctions de deux variables.

Exercice 1.
Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

a) $f(x,y) = (x+y)\ \sin\ (\dfrac{1}{x^2+y^2})$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{\mid x+y \mid}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin\ x$

f) $f(x,y) = \dfrac{\sin\ (x^2) + \sin\ (y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Exercice 2.
Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles d'ordre 1 ainsi que la différentiabilité de la fonction f:

a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \sin\ (\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

Exercice 3.
Soit f la fonction définie par:
$f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f admet des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 4.
Soit f la fonction définie par:
$f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
f est-elle de classe C^1, C^2?

Exercice 5.
Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pour lesquelles la fonction définie ci-dessous est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:
$f(x,y) = \dfrac{\mid xy \mid^\alpha}{x^2+y^2}$ si $xy \neq 0$ et $f(x,0) = f(0,x) = 0$.