1 Dénombrement

Dans les exercices qui suivent on essaiera de se donner une représentation des éléments dénombrés (p-uplets, parties, produits cartésiens,...). La calculatrice n'est la plupart du temps pas nécessaire.

Exercice 1.1 Dans un groupe E de cent personnes, on mène une enquète pour savoir quelles langues elles ont étudiées. On recueille les renseignements suivants :
74 ont étudié (au moins) l'anglais (A), 29 ont étudié (au moins) l'allemand (D), 19 ont étudié (au moins) l'anglais et l'allemand, 51 ont étudié (au moins) l'espagnol (S), 30 ont étudié (au moins) l'anglais et l'espagnol, 3 n'ont étudié aucune de ces trois langues, 12 les ont étudiées toutes les trois.

1. Traduire l'énoncé à l'aide des ensembles A, D, S, E et des symboles $\cap$ et $\cup$ et tracer un diagramme de Venn. Faire de même pour les questions qui suivent.
2. Combien ont étudié seulement l'allemand et l'anglais ? Combien ont étudié l'allemand et l'espagnol (au moins) ?
3. Combien ont étudié au moins deux ? exactement deux de ces trois langues ? une seule de ces trois langues ?

Exercice 1.2 Dans cet exercice on pourra formaliser les éléments à dénombrer sous forme de p-uplets et on décrira leur ensemble sous forme de produit cartésien.

1. Combien existe-t-il de nombres de n chiffres écrits en système décimal (le premier chiffre ne pouvant donc pas être 0).
2. Combien existe-t-il de nombres de 3 chiffres ne contenant aucun 0 et comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
3. Combien de codes peut-on former comportant 2 lettres différentes entre A et E suivies de 3 chiffres ne contenant aucun 0 et comportant au moins une fois le chiffre 1 ?

Exercice 1.3 Calculer sans calculatrice :

1. Le nombre de d'anagrammes que l'on peut fabriquer avec CINEMA et AMINATA.
2. Le nombre de façons de choisir 2 personnes dans un groupe de 100 personnes :
   a) Sucessivement avec remise b) Successivement sans remise. c) Simultanément.
3. Le nombre de tiercés dans l'ordre et dans le désordre avec 11 partants (sans le triangle de Pascal).
4. Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 5$.

Exercice 1.4 Un groupe comporte 4 garçons et 3 filles. Combien peut-on former d'équipes de 5 personnes :

1. Comportant 3 garçons et 2 filles ?
2. Sans cette contrainte.

Exercice 1.5 Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-il le faire dans chacun des cas suivants ?

1. Il ne met pas plus d'un prospectus par boîte et
   (a) les prospectus sont différents,
   (b) les prospectus sont identiques,
   (c) il y a 3 prospectus de type 1 et 4 prospectus de type 2 (penser aux anagrammes).
2. Il met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont différents.

Exercice 1.6 Un groupe de 9 personnes désire former 3 équipes de 3 personnes. Dans les questions qui suivent on pourra faire l'analogie avec des annagrammes.

1. Combien y-a-t-il de configurations possibles si chaque équipe possède un nom particulier et
   (a) dans chaque équipe il y a 3 rôles différents.
   (b) si les membres des équipes n'ont pas de rôle particulier.
2. Reprendre ces questions dans la cas où les équipes sont indifférenciées.

Exercice 1.7 Soit un entier $n \geq 1$ et E un ensemble à n éléments.

1. Montrer que la donnée d'une partie A de E équivaut à la partition de E en 2 parties ou à celle d'un n-uplet de $\{0,1\}^n$. En déduire $\text{card}(\mathcal{P}(E))$.
2. Utiliser le même procédé pour dénombrer le nombre de partitions de E en 3 parties comportant entre 0 et n éléments ou encore $F = \big\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid B \subset A\big\}$. Retrouver ce résultat par un raisonnement combinatoire.

Exercice 1.8 Soit un entier $n \geq 1$.

1. En dénombrant les parties de $[\![1,n]\!]$, déterminer la somme de la n-ième ligne du triangle de Pascal.
2. Pour $k \in E$, on désigne par E_k l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ dont le plus grand élément est k. Calculer $\text{card}(E_k)$ et retrouver le résultat de la question précédente.
3. Soit $p \leq n$. Pour $k = 1, \ldots, n$, on désigne par F_k l'ensemble des parties à $p+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$ dont le plus grand élément est $k+1$. Expliquer pourquoi $\text{card}(F_k) \neq 0 \Rightarrow p \leq k$. Calculer $\text{card}(F_k)$ et en déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{p}$.

Exercice 1.9

1. Combien y-a-t-il de dominos (un rectangle avec 2 chiffres quelconques) :
   a) Avec des numéros entre 0 et 6. b) Avec des numéros entre 0 et n.
2. Mêmes questions avec les trinominos (un triangle équilatéral avec 3 chiffres entre 0 et 5, répétition possible, en écartant les combinaisons où les 3 chiffres sont décroissants dans le sens des aiguilles d'une montre) :
   a) Avec des numéros entre 0 et 5. b) Avec des numéros entre 0 et n.

Exercice 1.10 Soit deux entiers $n, k \geq 1$. On souhaite choisir une équipe de k personnes dont un chef. Montrer qu'il y a autant de façons de choisir les k personnes puis désigner le chef que de choisir le chef d'abord et ensuite le reste de l'équipe.

Exercice 1.11 Soit deux entiers n et k avec $1 \leq k \leq n$. On dispose de n urnes discernables numérotées de 1 à n. Dans cet exercice on pourra utliser des p-uplets ou des parties à p éléments...

1. On suppose les k boules discernables (par exemple numérotées de 1 à k). Combien y-a-t-il de façons de placer les boules dans les urnes :
   (a) Si on place 0 ou 1 boule par urne.
   (b) Sans cette contrainte.
2. On suppose les k boules indiscernables. Même question :
   (a) Si on place 0 ou 1 boule par urne choisie.
   (b) Sans cette contrainte.

Exercice 1.12 Soit un entier $n \geq 1$. Combien y-a-t-il de triplets d'entiers entre 1 et n :

a) dans un ordre strictement croissant ? b) dans un ordre croissant au sens large ?

2 Espace probabilisé fini

<u>*Conseils pour aborder un exercice de probabilité*</u> : traduire l'énoncé et les questions posées.

1. Nommer les évènements intervenant dans l'énoncé (si une notation n'est pas imposée),
2. Identifier la probabilité utilisée (équiprobabilité ou autre, si cela est possible),
3. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé <u>**et**</u> les questions,
4. Trouver un chemin reliant les deux....

Exercice 2.1 On effectue un lancer d'un dé pipé à vingt faces et on note d le résultat ($1 \leq d \leq 20$). On suppose que l'on a la même probabilité d'obtenir un résultat entre 2 et 19, mais que la probabilité d'obtenir un 20 est deux fois plus importante, et la probabilité d'obtenir un 1 est deux fois plus faible.

1. Déterminer l'univers ainsi que la probabilité de chacun des résultats.
2. Calculer la probabilité des évènements $A = \{d \text{ est pair}\}$ et $B = \{d \geq 3\}$.

Exercice 2.2 Un championnat comporte deux épreuves. Un concurrent a deux chances sur 5 de remporter la première et une sur trois de remporter la deuxième.

1. Ce concurrent peut-il être certain de gagner au moins une des deux épreuves ?
2. Si ce concurrent a une chance sur deux de perdre les deux épreuves, quelle est la probabilité qu'il gagne les deux ?

Exercice 2.3 On considére une urne contenant 40 boules blanches et 60 noires, toutes indiscernables. Définir l'univers et la probabilité utilisée pour chacune des expériences aléatoires suivantes.

1. On tire une boule au hasard et on note sa couleur. Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?
2. On tire successivement et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit blanche ?
3. On tire cinq boules successivement et avec remise. Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule noire ?

Exercice 2.4 On effectue 4 lancers d'un dé équilibré. Quelle est la probabilité que :

1. On obtienne au moins un 6 ?
2. Que les 4 résultats apparaissent dans un ordre strictement croissant ? (combien de façons y-a-t-il de ranger 4 nombres distincts dans l'ordre croissant ?).
3. Que ces deux conditions soient réalisées en même temps ?

Exercice 2.5 Quelle est la probabilité que 4 personnes données aient leur anniversaire le même jour de l'année ? (on considère les dates d'anniversaire distribuées au hasard).

Exercice 2.6 $n \geq 1$. On tire à n reprises et avec remise un jeton dans une urne contenant 1 jeton A et 2 jetons B indiscernables au toucher. Déterminer la probabilité que le résultat obtenu contienne :

a) k lettres A. b) k lettres B.

Exercice 2.7 Soit un entier $n \geq 1$. On range au hasard $n+1$ paires de chaussettes toutes différentes dans n tiroirs numérotés, chaque tiroir devant contenir au moins une paire. Déterminer la probabilité que le dernier tiroir contienne deux paires de deux manières différentes :

1. Sans calculer card(Ω), en utilisant pour $i = 1, \ldots, n$, la classe d'équivalence C_i de tous les résultats où deux paires sont dans le tiroir i (comparer leurs cardinaux) et le lemme des bergers.
2. En dénombrant l'ensemble Ω des n-uplets/contenus des n tiroirs.

Exercice 2.8 Soit un entier $n \geq 1$. n convives sont placés au hasard par leur hôte autour d'une table à n places. Que vaut la probabilité que 2 personnes qui se connaissent soient l'une à côté de l'autre :

1. Si la table est rectiligne.
2. Si la table est circulaire (places non numérotées).

Exercice 2.9 On dispose de n tables et de $N = np$ personnes réparties au hasard à raison de p personnes par tables supposées distinctes. Que vaut la probabilité que 2 personnes données se retrouvent à la même table ?

3 Probabilités conditionnelles

Exercice 3.1 Une promo d'étudiants passe un examen. On estime que les 2/3 d'entre-eux ont travaillé, que la probabilité pour un étudiant de réussir un examen est de 4/5 s'il a travaillé et 1 chance sur 10 sinon. Que vaut la probabilité qu'un étudiant dise la vérité si

1. il se vante d'avoir réussi sans avoir travaillé ?
2. il se plaint de n'avoir pas réussi alors qu'il a travaillé ?

Exercice 3.2 Pour les fêtes de Pâques, les parents du petit yann ont dissimulé un gros oeuf en chocolat au hasard dans une des trois pièces A, B, C du rez de chaussée. Les chances pour yann de trouver l'oeuf si celui-ci est dans une de ces trois pièces sont respectivement de 3/4, 2/3 et 1/2. On note A, B, C les évènements "l'oeuf est caché dans le i-ième pièce" et T l'évènement "yann trouve l'oeuf". Dans cet exercice on pourra s'aider d'un arbre mais les formules devront être explicitement données.

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilités et probabilités conditionnelles ;
2. Calculer la probabilité que yann trouve l'oeuf dans la pièce A.
3. Calculer la probabilité que yann trouve l'oeuf dans une des trois pièces.
4. Calculer la probabilité que yann trouve l'oeuf sachant qu'il n'est pas dans la pièce A.

Exercice 3.3 Une nouvelle épidémie de grippe porcine fait son apparition fin 2020. Les laboratoires PigFlux ont mis au point un test pour dépister cette maladie. Les experts pensent que 20% des humains sont atteints par la maladie. De plus, des expériences ont montré que sur cinquante malades qui passent le test, deux ne sont pas détectés par le test, et que sur trente humains sains qui passent le test, un est pris pour malade à tort. On notera M l'évènement "l'humain est malade" et T l'évènement "l'humain est testé positif".

1. Calculer la probabilité qu'un humain soit déclaré malade suite au test ;
2. Calculer la probabilité qu'un humain soit sain, sachant qu'il a été déclaré malade suite au test.

Exercice 3.4 Trois personnes Albert (A), Béatrice (B) et Charles (C) tirent à la courte-paille. Albert tient dans sa main une longue paille, une moyenne et une petite. Chacune des 3 personnes tire une paille au hasard en finissant par Albert et ne la regarde qu'à la fin. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 3.5 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement des boules de cette urne de la façon suivante : lorsque l'on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne, lorsque l'on tire une boule noire on la remet dans l'urne et on rajoute aussi une autre boule noire. Quelle est la probabilité : de tirer N boules blanches en N tirages ? de tirer N boules noires en N tirages ? de tirer exactement une boule noire au cours de N tirages ? (Indic : on pourra poser $A_i =$"le i-ième boule tirée est blanche").

Exercice 3.6 Hugo joue à un jeu dans lequel s'il gagne une partie il a 60% de chances de gagner la partie suivante, et dans le cas contraire ses chances sont de 10%. Pour $n \geq 1$, on désigne par p_n la probabilité qu'Hugo gagne la n-ième partie.

1. Montrer à l'aide de la formule des probabilités totales que l'on a
$$p_{n+1} = a\, p_n + b \tag{1}$$
où a et b sont 2 constantes à déterminer.
2. Déterminer une solution constante p^* à l'équation 1. On pose $u_n = p_n - p^*$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et expliciter u_n puis p_n en fonction de n. La suite (p_n) admet-elle une limite ?

Exercice 3.7 On choisit au hasard un dé dans une urne contenant une proportion $\alpha \in]0;1[$ de dés truqués. Si un dé est truqué la probabilité d'obtenir un 6 vaut $p \in]0;1[$. On effectue $n \geq 1$ lancers successifs du dé choisi. Pour $i \in \mathbb{N}$, on définit l'évènement $A_i =$"le i-ème lancer est un 6", et T l'évènement le dé est truqué. On pose pour $n \geq 1$, p_n la probabilité que le dé soit truqué sachant que les n premiers lancers sont des 6. On suppose les lancers indépendants entre-eux que le dé choisi soit truqué ou non.

1. Déterminer $\mathrm{P}(T)$, $p_1 = \mathrm{P}(T \mid A_1)$ et $\mathrm{P}(A_1)$.
2. Calculer pour $n \geq 1$, $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \mid T)$, $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \mid T^c)$, $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ et enfin p_n.
3. Que devient p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter.

Exercice 3.8 On considère une population de $N \geq 2$ individus dont m d'entre-eux $(1 \leq m < N)$ possèdent une caractéristique particulière c. On prélève deux individus (au hasard) et on note les évènements $A =$"le 1$^{\text{er}}$ individu possède la caractéristique", $B =$"le 2$^{\text{ème}}$ individu possède la caractéristique", $C =$"un seul des individus prélevés possède la caractéristique".

1. Les évènements A et B sont-ils indépendants si les individus sont prélevés :
   a) avec remise   b) sans remise
2. les évènements A, B, C peuvent-ils être mutuellement indépendants ?

4 Variables discrètes finies

Exercice 4.1 Une urne contient 7 boules indiscernables 3 rouges et 4 vertes. On tire simultanément 3 boules et on note X le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la valeur moyenne de X et la variance de X.

Exercice 4.2 Une urne contient 5 boules indiscernables numérotées de 1 à 5. On tire deux boules au hasard et simultanément et on note X le maximum des deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la valeur moyenne de X et la variance de X.

Exercice 4.3 Un sac contient 4 pièces dont on sait que 2 sont en cuivre et 2 en or. On tire sans remise une par une chacune des pièces jusquà avoir tirer les 2 pièces d'or. On note X le nombre de tirage nécessaires. On notera O_i (resp. C_i) l'évènement la i-ième pièce tirée est en or (resp. en cuivre).

1. En vous aidant d'un arbre, déterminer la loi de X.
2. Calculer la valeur moyenne de X et la variance de X.

Exercice 4.4 Un groupe de 40 étudiants compte 12 filles. On tire un échantillon de 6 personnes.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait 3 étudiantes dans l'équipe dans le cas d'un tirage :
   a) successif avec remise b) sans remise c) simultané
   Montrer en particulier que le résultat numérique est le même dans les deux derniers cas.
2. On suppose l'équipe constituée par tirage successif avec remise. Déterminer la loi du nombre X de filles dans l'échantillon ainsi que sa valeur moyenne.

Exercice 4.5 Un fabriquant affirme que la proportion de pixels défectueux sur ses écrans est de 0,8 sur un million. On note X le nombre de pixels défecteux sur un écran donné de 1080 x 1920 pixels. On supposera le comportement des résultats indépendants.

1. Que vaut la probabilité p qu'un pixel donné soit défecteux ? Quelle loi suit la variable X ? Que vaut la probabilité que l'écran ne comporte aucun pixel défecteux ?
2. Le fabriquant remplace l'écran à partir de 3 pixels défectueux. Quelle est la probabilité qu'un écran soit suceptible d'être repris par le fabricant ?
3. Que valent la valeur moyenne et la variance de X ?

Exercice 4.6 Un joueur effectue 5 lancers indépendants d'une pièce $Pile - Face$. Pour chaque lancer, la probabilité d'obtenir un Pile vaut $p = \frac{1}{3}$. On note X le nombre de $Pile$ obtenus sur les 5 lancers.

1. En rappelant en détail le schéma de Bernoulli utilisé mais sans démonstration, justifier que X suit une loi binômiale. Calculer son espérance et sa variance.
2. Rappeler la forme générale de la loi $\mathrm{P}(X = k)$ pour $k = 0, \ldots, 5$ puis calculer la probabilité d'obtenir respectivement 2 $Pile$, au moins un $Pile$. Quelle loi suit la variable $Y = 5 - X$.
3. Le joueur gagne 3 euros par $Face$ obtenu et perd 1 euro pour chaque $Pile$ obtenu. On note B son bénéfice. Exprimer B en fonction de X, puis déterminer si en moyenne le jeu lui est favorable.

Exercice 4.7 10 souris entrent une par une dans 3 cages. Elles choisissent leur cage au hasard et indépendamment les unes des autres. On note X_1, X_2, X_3 le nombre de souris dans la 1$^{\text{re}}$, 2$^{\text{e}}$, 3$^{\text{e}}$cage respectivement. Déterminer :

1. La loi des X_i ainsi que leur espérance et variance.
2. La loi de $X_2 + X_3$.

Exercice 4.8 (loi géométrique tronquée) Pierre joue à un jeu de foire en se fixant un maximum de n essais et s'arrête au premier succès. La probabilité d'un succès à chaque essai vaut p et les essais sont indépendants. On pose $q = 1 - p$. On note X_n le rang du premier succès. On prendra $X_n = 0$ s'il n'y a aucun succès.

1. A l'aide d'un arbre de probabilité et de la formule des probabilités composées, montrer que pour $k = 1, \dots, n$,
$$\mathrm{P}(X_n = k) = q^{k-1}p$$
et en déduire $\mathrm{P}(X_n = 0)$.
2. On pose pour $x \in]0;1[$, $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ et $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. En dérivant S, montrer que $T(x) = \frac{1-[1+n(1-x)x^n]}{(1-x)^2}$.
En déduire que l'on a
$$\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{p}\left[1 - (1 + np)q^n\right]$$
3. On prend $p = 0{,}1$. Calculer $\mathrm{E}(X_n)$ pour $n = 3$ et $n = 10$. Vers quelle limite tend $\mathrm{E}(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 4.9 Soit un entier $n \geq 2$. Pierre a perdu plusieurs chaussettes. Une seule d'entre-elle est rangée dans une commode comportant n tiroirs (distincts), mais Pierre ne le sait pas et ouvre les n tiroirs sans ordre précis. On note X le nombre de tiroirs ouverts par Pierre pour retrouver sa chaussette.

1. Pour $i = 1, \dots, n$, on note A_i ="Pierre trouve la paire dans le i-ième tiroir qu'il ouvre".
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(A_1)$, $\mathrm{P}(A_1^c)$ puis pour $i = 1, \dots, n-1$, $\mathrm{P}(A_{i+1} \mid A_1^c \cap \dots \cap A_i^c)$ et $\mathrm{P}(A_{i+1}^c \mid A_1^c \cap \dots \cap A_i^c)$
   (b) En déduire $\mathrm{P}(A_1^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c \cap A_i)$ et $\mathrm{P}(A_1^c \cap \dots \cap A_{i-1}^c \cap A_i^c)$ pour $i = 1, \dots, n$ ainsi que la loi de X. Quel est le nom de cette loi ?
2. Calculer la valeur moyenne et la variance de X (Indic : on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Exercice 4.10 On fait cadeau à Oscar d'un sac contenant n boites indiscernables au toucher dont il sait que k contiennent un chocolat avec $1 \leq k \leq n$. Oscar tire les boites une par une du sac et les ouvre pour manger les chocolats. On note X le nombre de boites qu'il doit ouvrir pour manger les k chocolats.

1. On considère l'ensemble E_k des suites de n lancers Pile/Face comportant k Pile. En dénombrant les éléments de E_k dont le dernier Pile apparait au i-ième lancer pour $k \leq i \leq n$:
   (a) Montrer que $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.
   (b) Déterminer la loi de X (on vérifiera qu'il s'agit bien d'une loi).
2. En remarquant que $i\binom{i-1}{k-1} = k\binom{i}{k}$, calculer l'espérance de X.

5 Variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Exercice 5.1 Un joueur joue indéfiniment à une jeu avec la probabilité $p = 1/10$ de gagner, chaque partie étant indépendante des autres. Soit X la variable du rang de la $1^{\text{ière}}$ fois où il gagne. Pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, on note X_i la v.a. valant 1 si le joueur gagne la i-ième partie et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X (on pourra s'aider des X_i) ainsi que son espérance et sa variance.
2. Pour $n \geq 1$, déterminer $\{X > n\}$ à l'aide des X_i et en déduire $\mathrm{P}(X > n)$. Quel est le nombre minimal de parties pour que le joueur soit sûr de gagner au moins une fois pendant les n premières avec une probabilité d'au moins 90% ?
3. Montrer que pour $m \geq 1$ et $n \geq 1$, la probabilité que le joueur de perdre pendant les m parties suivantes sachant qu'il a perdu les n premières ne dépend pas de n (on dit que la loi est sans mémoire).

Exercice 5.2 Chaque jour ou l'on met en route un appareil, il y a une chance sur 1000 que celui-ci tombe en panne (les essais sont indépendants). On note X le rang de la première fois où la panne a lieu. On note pour $i \in \mathbb{N}^*$, X_i la v.a. valant 1 si l'appareil tombe en panne au i-ième essai et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X (on pourra s'aider des X_i), ainsi que sa valeur moyenne et sa variance
2. Pendant quelle période maximale peut-on garantir qu'une panne n'arrivera pas avec une probabilité d'au moins 90% ?

Exercice 5.3 Soit X un v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et qui suit une loi sans mémoire, c.à.d., $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathrm{P}(X > n + m \mid X > n) = \mathrm{P}(X > m)$$

Montrer que X suit une loi géométrique.

Exercice 5.4 Un loueur possède 10 véhicules. Il a constaté que la demande N de véhicules loués pour la journée suit une loi de Poisson et qu'en moyenne sur cette période 5 véhicules sont loués. Pour certaines des questions de cet exercice on pourra utiliser la table de répartition de la loi de Poisson en fin de sujet.

1. Que vaut la probabilité qu'aucun véhicule ne soit loué ? Qu'un véhicule soit loué ?
2. Qu'au moins 5 véhicules soient loués.
3. Quelle est la probabilité que le loueur ne puisse satisfaire la demande ?

Exercice 5.5 Une firme emploie 200 personnes, chacune téléphonant en moyenne trois minutes par heure.

1. Déterminer la loi du nombre X d'employés téléphonant pendant une minute donnée.
2. En utilisant l'approximation par la loi de Poisson, calculer le nombre de lignes téléphoniques nécessaires si on désire que la probabilité que le nombre de lignes soit insuffisant soit inférieure à 2 %.

Exercice 5.6 Un fabricant livre des articles qui peuvent présenter des défauts. Le nombre de défauts, pour un article, suit une loi de Poisson de paramètre m.

1. On veut que la probabilité pour qu'il y ait au moins 4 défauts sur un article quelconque soit égale à 0,08 %. Déterminer m. (On prendra la valeur la plus proche dans les tables).
2. On considère un lot de 1000 articles satisfaisant à la condition de la question précédente. Quelle est la probabilité pour que, dans ce lot, il y ait k articles présentant au moins 4 défauts ? En utilisant l'approximation de Poisson (à justifier), déterminer la probabilité pour qu'il n'y en ait pas plus de 3 présentant au moins 4 défauts.

Exercice 5.7 Chaque fois que Christophe tire sur la cible il a une chance sur 10 de l'atteindre. La deuxième fois qu'il la touche la cible tombe. On note X le rang du lancer où il atteint la cible pour la deuxième fois et pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, on note Y_i la v.a.r. valant 1 si Christophe touche la cible au i-ième lancer et 0 sinon. On suppose les lancers indépendants.

1. Pour $n \geq 2$ fixé :

(a) Exprimer l'évènement $\{X = n\}$ en fonction des évènements $\{Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = 1\}$ et $\{Y_n = 1\}$. Ces évènements sont-ils indépendants ?

(b) Quelle loi suit la variable $Y_1 + \cdots + Y_{n-1}$? En déduire $\mathrm{P}(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = 1)$.

(c) Montrer que

$$\mathrm{P}(X = n) = (n-1)(1-p)^{n-2}p^2$$

avec $p = 0{,}1$.

2. On rappelle que pour $x \in]0; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. En dérivant deux fois cette série terme à terme montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

3. En déduire que l'on obtient bien une loi de probabilité et que $\mathrm{E}(X) = \frac{2}{p}$.

Exercice 5.8 Un embranchement autoroutier voit arriver en une heure un nombre X de véhicules de moyenne 500 et suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Sur ces X véhicules une proportion $p \in]0, 1[$ prend la voie de droite. On note Y le nombre de véhicules prenant la voie de droite. Les véhicules sont supposés avoir des comportements indépendants.

1. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, n$, $\mathrm{P}(Y = k \mid X = n)$ et en utilisant la formule des probabilités totales en déduire la loi de Y ainsi que sa valeur moyenne. Ce résultat vous semble-t-il cohérent ?
2. Déterminer la loi de $X - Y$ sans faire de calcul supplémentaire. Les variables Y et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 5.9 (Loi de Pascal) On lance 2 dés équilibrés simultanément et indéfiniment. Soit un entier $r \geq 1$. On appelle X_r le rang du r-ième lancer où la somme des 2 dés vaut 6 et on suppose les lancers indépendants.

1. Montrer que la probabilité que la somme soit égale à 6 pour un lancer quelconque des 2 dés vaut $p = 5/36$
2. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note Y_i la v.a.r. valant 1 si la somme vaut 6 lors du i-ième lancer et 0 sinon.
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq r$, exprimer $\{X_r = n\}$ en fonction d'évènements portant sur les variables $Y_1 + \cdots + Y_{n-1}$ et Y_n. Que peut-on dire de ces 2 variables ?
   - En déduire que pour $n \geq r$, $\mathrm{P}(X_r = n) = \binom{n-1}{r-1}(1-p)^{n-r}p^r$

Exercice 5.10 Une urne contient des pièces en Or en proportion $p \in]0; 1[$, et des pièces en Cuivre indiscernables au toucher. On tire les pièces avec remise. On définit les variables X et Y par $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i, Y = j)$ correspond à "une couleur apparait i fois, puis l'autre couleur j fois, puis la couleur initiale réapparait"'. On notera O_i (resp. C_i) l'évènement la i-ième pièce tirée est en or (resp. en cuivre).

1. Montrer que $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

   $$\mathrm{P}(X = i, Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

   En déduire les lois de X et Y.
2. Déterminer les valeurs moyennes de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?