RECUEIL D'EXERCICES D'ANALYSE

ING2-ECE-PARIS

2014-2015

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES DE L'ECE

FEUILLE D'EXERCICES 1
ANALYSE VECTORIELLE

Exercice 1: Trouvez les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

1. $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = (y + \ln(x+1))\vec{i} + (x + 1 - e^y)\vec{j}$
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = (4x^3y^2 - 3y^2 + 8)\vec{i} + (2x^4y - 6xy - 1)\vec{j}$
3. $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \Big(\dfrac{1-y}{(x+y+1)^2}, \dfrac{2+x}{(x+y+1)^2}\Big)$
4. $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \Big(\dfrac{y^2}{(x+y)^2}, \dfrac{x^2}{(x+y)^2}\Big)$
5. $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \Big(2x + \dfrac{1}{y}, 2y - \dfrac{x}{y^2}\Big)$

Exercice 2 Etablir, à partir des relations de définition, les formules de composition :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(f+g) &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \overrightarrow{\text{grad}}(g) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f.g) &= f.\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g.\overrightarrow{\text{grad}}(f) \end{aligned}$$

Exercice 3

1. On donne $\vec{A} = e^{-y}(\vec{e}_x - \sin(x)\vec{e}_y)$, chercher $\overrightarrow{\nabla}.\vec{A}$.
2. On donne $\vec{A} = x^2\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + xy\vec{e}_z$, chercher $\overrightarrow{\nabla}.\vec{A}$.
3. On donne $\vec{A} = 5x^2\sin(\dfrac{\pi x}{2})\vec{e}_x$, calculer $\overrightarrow{\nabla}.\vec{A}$ au point $x = 1$.

Exercice 4 Soient les vecteurs $\vec{A} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{B} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ et $\vec{C} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$:

1. Calculer $\Big(\vec{A} \wedge \vec{B}\Big) \wedge \vec{C}$ et comparer avec $\vec{A} \wedge \Big(\vec{B} \wedge \vec{C}\Big)$
2. Calculer $\vec{A}.\Big(\vec{B} \wedge \vec{C}\Big)$ et comparer avec $\Big(\vec{A} \wedge \vec{B}\Big).\vec{C}$

Exercice 5 Soit un champ de vecteurs, $\vec{A} = (y\cos(ax))\vec{e}_x + (y + e^x)\vec{e}_z$, calculer $\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}$.

Exercice 6 Soient le champ scalaire $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et le champ de vecteurs $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définis par $\Phi(x,y,z) = x^2yz^3$ et $\vec{A}(x,y,z) = xz\vec{i} - y^2\vec{j} + 2x^2y\vec{k}$.

1. Calculez $\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)$, $\text{div}(\vec{A})$,$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$, $\Delta(\Phi)$, $\text{div}(\Phi\vec{A})$, $\overrightarrow{\text{rot}}(\Phi\vec{A})$, $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi))$, $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}))$.

2. Vérifier les formules classiques:

$$\text{div}(p\vec{u}) = p\text{div}(\vec{u}) + \vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}(p),$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(p\vec{u}) = p\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) + (\overrightarrow{\text{grad}}(p)) \wedge \vec{u},$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(p)) = 0,$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})) = 0.$$

Exercice 7 Exprimer en coordonnées cylindriques (r, θ, z), le vecteur $\vec{A}$ donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{A} = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{e}_z$$

Remarque importante *Il n'y a pas unicité du potentiel vecteur. En général, pour effectuer un calcul, on cherche un potentiel vecteur convenable (on ne les cherche pas tous). Il peut arriver que l'on ajoute des conditions supplémentaires (voir jauge de Lorenz ou jauge de Coulomb en électromagnétisme).*

Exercice 8 Soit $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ un champ de vecteurs. Calculer $\text{div}(\vec{F})$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})$. Justifier que $\vec{F}$ est un champ de gradient.

Exercice 9 Soit $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$ le champ vectoriel où $P(x, y, z) = x + \dfrac{z}{x^2y}$, $Q(x, y, z) = y + \dfrac{z}{xy^2}$, $R(x, y, z) = z - \dfrac{1}{xy}$.

1. Calculez $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V})$. Déduisez-en que $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients (*i.e.* il existe une fonction réelle telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$).
2. Trouvez f telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$.

Exercice 10 Soit $\vec{F}$ le champ vectoriel de $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\}$ vers $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{F}(x, y, z) = \Big(\frac{-2xz^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2yz^3}{(x^2 + y^2)^2}, 1 + \frac{3z^2}{x^2 + y^2}\Big)$$

Montrer que $\vec{F}$ est un champ de gradient, déterminer un potentiel scalaire Φ.

Exercice 11 Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{F}$ défini par $(x, y, z) \to (yz, -xy, x^2 + xz)$. Montrer que $\overrightarrow{F}$ est un champ de rotationnel et trouver un potentiel vecteur de la forme $X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j}$.

Exercice 12 Soit $\vec{F} = (P, Q, R)$ le champ vectoriel où $P(x, y, z) = x^2(z - y)$, $Q(x, y, z) = y^2(x - z)$ et $R(x, y, z) = z^2(y - x)$.

1. Calculer $\operatorname{div}(\vec{F})$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{F})$.
2. Trouver $\vec{G} = (X, Y, Z)$ tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{G})$ et $Z(x, y, z) = 0$.

Exercice 13 On considère le champ de vecteurs

$$\vec{F} = (3x^2 + 3y - 1)\vec{i} + (z^2 + 3x)\vec{j} + (2yz + 1)\vec{k}$$

1. Montrer que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire.
2. Trouver un potentiel dont il dérive.

Exercice 14 On considère le champ de vecteurs

$$\vec{F} = (\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2})\vec{i} + (\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2})\vec{j} + (\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2})\vec{k},$$

défini sur

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\}$$

1. Montrer que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire.
2. Trouver un potentiel dont il dérive.

Exercice 15 Soit $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$ le champ vectoriel où

$$P(x, y, z) = 1 - x^2, Q(x, y, z) = f(y) \text{ et } R(x, y, z) = (2x - y)z,$$

où f est une fonction continûment dérivable. On suppose que $\vec{V}$ est un champ de rotationnels et que $f(0) = 0$.

1. Déterminez $f(y)$.
2. Trouvez $\overrightarrow{W} = (X, Y, Z)$ t.q $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{W})$ et t.q $X(x, y, 0) = 0, Y(x, y, 0) = 0, Z(x, y, z) = 0$.

Exercice 16 Déterminez une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{G} := (1 + x^2)\varphi(x)\vec{i} + 2xy\varphi(x)\vec{j} - 3z\varphi(x)\vec{k},$$

dérive d'un champ de rotationnel. Déterminez un potentiel vecteur $\vec{F}$ (*i.e.* $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{F}) = \vec{G}$) sur $\mathbb{R}^3$ en lui imposant $\vec{F} \perp \vec{k} \Leftrightarrow\ < \vec{F}, \vec{k} >= 0$.

Exercice 17 Déterminez les applications $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continûment dérivales telles que $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) = \Big(\frac{\ln(x) + y - 1}{x^2 y}, \frac{\ln(x)}{xy^2}\Big)$.
Résolvez l'équation différentielle $(x \ln x)y^{'} + (\ln(x) + y - 1)y = 0$.

FEUILLE D'EXERCICES 2
INTÉGRALES MULTIPLES (DOUBLES, TRIPLES)

Exercice 1 On pose $R = [0,1] \times [0,1]$. Calculer les intégrales suivantes:

1) $\iint_R (x^3 + y^2)\, dxdy$ 2) $\iint_R ye^{xy}\, dxdy$ 3) $\iint_R (xy)^2 \cos x^3\, dxdy$

4) $\iint_R \ln[(x+1)(y+1)]\, dxdy$ 5) $\iint_R (x^m y^n)\, dxdy$, où $m,n>0$ 6) $\iint_R \sin(x+y)\, dxdy$

Exercice 2 Soit D la région du plan bornée par les axes des x et des y positifs et la droite $3x+4y=10$. Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy$.

Exercice 3 Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)dxdy$ dans les exemples suivants,

1. $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.
2. $f(x,y) = x^2y, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

Exercice 4 Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} y^2\sqrt{x}\, dxdy$ où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des (x,y) avec $x > 0$, $y > x^2$ et $y < 10 - x^2$.

Exercice 5 Calculer l'intégrale double : $\iint_D xy\, dx\, dy$ si

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\}$.

3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\}$.

4) D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équation : $y = x^2$ et $x = y^2$.

Exercice 6 Calculer $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ dans chaque cas suivant:

1) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ et $\mathcal{D}$ est le disque unité. (coordonnées polaires)

2) $f(x,y) = x + y$ et $\mathcal{D}$ est la région bornée par $0 \leq y \leq x$ et $0 \leq x \leq 1$.

3) $f(x,y) = xy$ et $\mathcal{D}$ est $[0,1] \times [1,2]$.

4) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+2y}}$ et $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$.

5) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ et $\mathcal{D}$ est le disque de rayon 2.

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\, dxdydz$ dans chaque cas suivant:

1) $f(x,y,z) = x^2ye^{xyz}$ et $\mathcal{B} = [0,1]^3$

2) $f(x,y,z) = z^2$ et $\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$

3) $f(x,y,z) = x^2z$ et $\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash\ x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$

Exercice 8 Calculer $\displaystyle\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\, dxdydz$ dans chaque cas suivant:

1) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$ et $\mathcal{B} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\big\},\ R \in \mathbb{R}_+^*$ fixé .

2) $f(x,y,z) = (3x+2y+z)^2$ et $\mathcal{B} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 9x^2+4y^2+z^2 \leq 1\big\}$

3) $f(x,y,z) = z$ et $\mathcal{B} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\big\}$

Exercice 9 Calculer les intégrales triples suivantes

1. $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (1+x)dxdydz$ où $\mathcal{D}$ est délimité par les plans $x+y+z=1, x=0, y=0$ et $z=0$.
2. $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x^3y^2zdxdydz$ où $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\big\}$.
3. $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x^2dxdydz$ où $\mathcal{D}$ est délimité par $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.
4. $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} zdxdydz$ où $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\big\}$.
5. $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} zdxdydz$ où $\mathcal{D} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1, z \geq 0\big\}$.

Exercice 10 Calculer le volume du solide déterminé par $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ et $z \geq 2$.

Exercice 11 Calculer $\iiint_W f(x, y, z)dxdydz$ dans chaque cas suivant:

1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et W est le solide borné par $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$

2) $f(x, y, z) = z$ et W est le solide borné par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ et par $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

3) $f(x, y, z) = z$ et $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \ x + y + z \leq a\}$.

Exercice 12 Trouver les volumes des solides S suivants:

1) S est borné par $z = x^2 + y^2$ et par $z = 10 - x^2 - 2y^2$

2) S est la région commune aux cylindres $x^2 + y^2 \leq a^2$ et $x^2 + z^2 \leq a^2$.

Exercice 13 Calculer les intégrales triples :

1) $\iiint_D xyz\ dx\ dy\ dz$ avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0\}$.

2) $\iiint_D z^2\ dx\ dy\ dz$ avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h\}$.

3) $\iiint_D \dfrac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq b^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

Exercice 14 Intégrer $ze^{x^2+y^2}$ sur le cylindre $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

Exercice 15 Intégrer $x^2 + y^2 + z^2$ sur $x^2 + y^2 \leq 2$ et $-2 \leq z \leq 3$.

Exercice 16 Calculer $\iiint_S (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}} dxdydz$ où S est la couronne sphérique centrée en l'origine de rayon $0 < b < a$.

Exercice 17 Calculer le volume de l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$, où a, b et c sont positifs.

Exercice 18 Trouver le volume du domaine délimité par

1) $x^2+y^2 = hz$ et $z = h$, 2) $y = x^2, y = 1, x+y+z = 3$ et $z = 0$, 3) $2z = x^2+y^2$ et $x^2+y^2+z^2 = 3$.

FEUILLE D'EXERCICES 3
INTÉGRALES CURVILIGNES

Exercice 1 Soit $\int_{\mathcal{C}} xdx + y^2dy + z^3dz$ avec $\mathcal{C}$ paramétrée par c. Evaluer l'intégrale curviligne de la forme diffrentielle $xdx + y^2dy + z^3dz$ dans les cas suivants:

1) $c(t) = (t, t, t), t \in [0, 1]$ 2) $c(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in [0, \pi]$ 3) $c(t) = (t^2, 3t, 2t^3), t \in [-1, 2]$

Exercice 2 Calculer $\int_{\mathcal{C}} (x-y)dx+(x+y)dy$ où $\mathcal{C}$ désigne le demi-cercle supérieur orienté dans le sens direct.

Exercice 3 Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\mathcal{C}} \omega$ dans les cas suivants:

a) $\omega = (x - y^3)dx + x^3dy$ et $\mathcal{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcouru une fois dans le sens positif.

b) $\omega = xy^2dy - yx^2dx$ et $\mathcal{C}$ est le cercle $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru une fois dans le sens direct.

c) $\omega = x^2dy+y^2dx$, et $\mathcal{C}$ est la demi-ellipse définie par $\left\{ \begin{array}{c} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$ et parcourue dans le sens indirect.

d) $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$ et $\mathcal{C}$ est le contour du carré ABCD, où A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1) et D(1,-1).

e) $\omega = ydx + 2xdy$ et $\mathcal{C}$ est le contour du domaine défini par $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \end{array} \right.$

Exercice 4 Evaluer chacune des intégrales curvilignes suivantes:

1. $\int_{\mathcal{C}} xdy + xy^2dx$, avec $\mathcal{C}$ paramétrée par c définie par $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. $\int_{\mathcal{C}} xdx + ydy$ avec $\mathcal{C}$ paramétrée par c définie par $c(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $t \in [0, 2]$.
3. $\int_{\mathcal{C}} xdx + ydy$ où $\mathcal{C}$ est constituée des 2 arcs d'équations paramétriques $y = x^2$ et $x = y^2$ joignant les points $(0, 0)$ à $(1, 1,)$ dans le sens direct.
4. $\int_{\mathcal{C}} yzdx + xzdy + xydz$, où $\mathcal{C}$ est constituée des 3 segments joignant $(1, 0, 0)$ à $(0, 1, 0)$ à $(0, 0, 1)$ dans le sens direct.
5. $\int_{\mathcal{C}} ydx - xdy$, où $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$ et $\mathcal{C}$ parcouri dans le sens direct.

Rappel

- Une forme différentielle $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ de $\mathbb{R}^2$ $\big($respectivement $w = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ de $\mathbb{R}^3\big)$ est dite *fermée* si les dérivées croisées sont égales, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\big($respectivement si les dérivées croisées sont égales, i.e. $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$.)
- Une forme différentielle $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $w = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ de $\mathbb{R}^3$) est dite *exacte* s'il existe une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\big($resp. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\big)$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$ $\big($et resp. $\dfrac{\partial f}{\partial z} = R\big)$

Exercice 5 Soit $\omega = y^2(\sin x + x\cos x)dx + 2xy\sin x dy$.

1. Montrez que cette forme est fermée sur tout le plan.
2. Déterminez une fonction $f(x,y)$ telle que $\omega = df$ (on dit que ω est *exacte*).
3. Calculez $I_1 = \displaystyle\int_\Gamma \omega$, où Γ est le segment allant de $(0,0)$ à $(\frac{\pi}{2}, 1)$.
4. Calculez $I_2 = \displaystyle\int_\Gamma \omega$, où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 6 Soit $\omega = (3x^2y + 2y^2)dx + (x^3 + 4xy)dy$

1. Montrez que cette forme est fermée sur tout le plan.
2. Déterminez une fonction $f(x,y)$ telle que $\omega = df$.
3. Calculez $I_1 = \displaystyle\int_\Gamma \omega$, où Γ est le segment allant de $(0,0)$ à $(1,1)$.
4. Calculez $I_2 = \displaystyle\int_\Gamma \omega$, où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 7 Déterminer les cercles du plan le long desquels l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \omega$, avec

$$\omega = x^2dy + y^2dx,$$

est nulle.

Exercice 8

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} (xdy + ydx)$ ne dépend que des extrémités de l'arc.
2. Vérifiez ce résultat par le calcul de I sur les arcs de courbes $y = x$, $y = x^2$, $y^2 = x$.

FEUILLE D'EXERCICES 4
INTÉGRALES DE SURFACES

Exercice 1 Calculer les intégrales de surface

$$a) \iint_S xye^{xz}dS \text{ avec } S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash\ x^2+y^2=1, 0 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$b) \iint_S \ln(z)dS \text{ avec } S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash\ x^2+y^2+z^2=1, \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}.$$

Exercice 2 Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash\ x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ une sphère de rayon R, Calculer son aire (en utilisant les coordonnés sphériques).

Exercice 3 Calculer l'aire de l'ellipse.

Exercice 4 Calculer le moment d'inertie d'un triangle rectangle de côté a et b par rapport à son sommet droit.

Exercice 5 Soient $F(x,y,z) = (y, -x, x^2)$ et $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$. Calculer le flux passant à travers Σ.

Exercice 6 Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (x,y,-z)$ à travers la demi-sphère d'équation $\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ z \geq 0 \end{array}\right.$ orienté vers l'intérieur.

Exercice 7 Calculez la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = (y-z, z-x, x-y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E} = \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 1 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$ (aprés avoir précisé le sens de parcours choisi).

1. directement
2. en utilisant la formule de Stokes.

Exercice 8 Calculez le flux à travers la surface $\mathcal{C}$ orienté selon l'axe (Oz) et déterminée par l'ellipse d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & = & 1 (\text{où } a > 0 \text{ et } b > 0) \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (1,2,3)$.
2. $\overrightarrow{W}(x,y,z) = (z,y,x^2)$.

Exercice 9 Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus z = 6 - 3x - 2y; x, y, z \geq 0\}$. Soit $F = (x, y, z) = (0, z, z)$. Calculer le flux qui passe par cette surface.

Exercice 10 (*Intégrales de surface de fonctions scalaires*) Calculer chacune des intégrales suivantes:

1) $\displaystyle\iint_S z dS$ où S est l'hémisphère supérieure de rayon 2.

2) $\displaystyle\iint_S (x + y + z) dS$ où S est la sphère unité.

3) $\displaystyle\iint_S z dS$ où S est la surface $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Exercice 11 Calculer $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}(F).dS$, où $F = (y, -x, zx^3y^2)$ et S est la surface

$x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$. ($\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal pointant vers le haut).

Exercice 12 Calculer $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}(F).dS$, où $F = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ et S est la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$. (n est le vecteur unitaire normal pointant vers le haut).

Exercice 13 Calculer $\displaystyle\iint_S F.dS$, avec $F = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ et S est la sphère unité.

Exercice 14 Soit $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. On considère la demi-ellipsoïde supérieure

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0\right\}$$

avec l'orientation déterminée par la normale dirigée vers le haut. Calculer $\displaystyle\iint_S F.dS$ où $F = (x^3, 0, 0)$.

Exercice 15 Soit S la demi-sphère $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\right\}$ orientée par la normale extérieure. Calculer $\displaystyle\iint_S F.dS$ dans les cas suivants:

1) $F = (x, y, 0)$

2) $F = (y, x, 0)$

Pour ces deux cas, calculer $\displaystyle\iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}}(F)).dS$ et $\displaystyle\int_C F.dS$ où C est le cercle unité dans le plan xy traversé dans le sens contraire des aiguilles (vu de l'axe des z positifs). On notera que C est la frontière de S.

FEUILLE D'EXERCICES 5
THÉORÈMES D'ANALYSE VECTORIELLE

Théorème de Stokes

Exercice 1 Soit S la surface définie par $S = S_1 \cup S_2$, où S_1 est la surface $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ et S_2 est la surface $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$.

Soit $F = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calculer $\displaystyle\iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}}(F)).dS$.

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}}(F)).dS$, où S est la portion de surface définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z \geq 1$ et $F = (x, y, z)$.

Exercice 3 Calculer $\displaystyle\iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}}(F)).dS$, où S est $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, et

$F = (x^3, -y^3, 0)$.

Exercice 4 Calculer $\displaystyle\iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}}(F)).dS$, où S est $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, et $F = (\sin(xy), e^x, -yz)$.

Théorème de Green

Exercice 5 Soit $F = (x^3, y^3, z^3)$. Calculer le flux de F sur la sphère unité.

Exercice 6 Soit Ω le cube unité (premier octant). Calculer $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F.dS$ (de deux manières) dans les cas suivants:

$$1)F = (x, y, z), \qquad 2)F = (1, 1, 1), \qquad 3)F = (x^2, x^2, z^2)$$

Exercice 7 Soit $F = (x, y, xz)$. Calculer $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F.dS$ dans les régions Ω suivantes:

1) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

2) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ et $x \geq 0$

3) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ et $x \leq 0$

Exercice 8 Idem que l'exercice précédent avec $F = (x - y, y - z, z - x)$.

FEUILLE D'EXERCICES 6
RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercice 1 Résoudre à l'aide des coordonnées polaires les équations aux dérivées partielles:

1) $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

2) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$

Exercice 2 Résoudre les équations aux dérivées partielles:

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ avec f une fonction des variables réelles x et y.

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ avec f une fonction des variables réelles x et y.

3) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 0$ avec f une fonction des variables réelles x, y et z.

Exercice 3 Soit f une fonction réelle des variables réelles x et y. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en utilisant le changement $u = \dfrac{x+y}{2}$ et $v = \dfrac{x-y}{2}$.

Exercice 4 Soit f une fonction réelle C^2 de la variable réelle u. On fait le changement de variables $u = y/x$ ($x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}$) et on pose $F(x,y) = f(y/x)$.

1) Calculer les dérivées partielles secondes de F.

2) Déterminer les fonctions f vérifiant :

a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ b) $\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$

Indication. Il sera très utile de connaître les formules de changement de variables

$$f(x,y) = F(u(x,y), v(x,y)) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Exercice 5 Résoudre les équations aux dérivées partielles du premier ordre suivantes
(1) : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$
(2) : Trouver les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 y$ (on utilisera le changement de variable $u = x$, $v = x + 2y$). Même question pour :
(3) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $U = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, $(u = x, v = \frac{y}{x})$
(4) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}$, $U = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, $(u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2)$
(5) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy^2$, $U = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, $(u = \frac{y}{x}, v = xy)$
(6) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = af$, $a \in \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ en utilisant les coordonnées polaires.
(7) : On veut résoudre $A \cdot \nabla f = 0$ avec $A = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_1 \neq 0$ où $A \cdot \nabla f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Montrer qu'il existe une matrice $M = (m_{ij})$ telle que le changement de variables défini par $X_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j$ pour $i = 1, \cdots, n$ ramène l'équation précédente à $\frac{\partial F}{\partial X_1} = 0$ ou $F(X_1, \cdots, X_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$. En déduire la solution générale de l'équation.

Exercice 6
Résoudre les équations aux dérivées partielles du second ordre suivantes

$$(1) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy \quad (2) : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Exrecice 7 Trouver $f(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ où $c > 0$ est fixé. On utilisera le changement de variables $u = x + ct$, $v = y - ct$. Montrer que $F(u,v) = f(t,x)$ vérifie $\dfrac{\partial F}{\partial u \partial v} = 0$

Exrecice 8

1. Trouver les solutions $f : U = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (on posera $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$).
2. Même question avec $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ avec $U = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ (en posant $u = \ln x$, $v = \ln y$).
3. Même question avec $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $U = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ (en posant $u = x^2 - y$, $v = x^2 + y$).

FEUILLE D'EXERCICES 7
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 1 Etudier la convergence des intégrales :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx$, c) $\int_0^1 \ln x\, dx$, d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

f) $\int_0^{+\infty} \frac{5x^3+2x+3}{x^4+3x^2+1}\, dx$, g) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, h) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$,

i) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{2}{tg^3 x}\, dx$, j) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$, k) $\int_0^1 x \sin\frac{1}{x^3}\, dx$, l) $\int_1^{+\infty} x\sin\frac{1}{x^3}\, dx$,

m) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$, n) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha}\, dx$, o) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\sin x}$, p) $\int_1^e \frac{x^2}{\ln x}\, dx$,

q) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$, r) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$, s) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^\alpha}$, t) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\, dx$.

Exercice 2 Etudier la convergence et calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}, \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)\,(x+b)}.$$

Exercice 3 Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx \ \text{ et } \ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx.$$

En considérant la somme $I+J$, calculer I et J.

Exercice 4 Vérifier que les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \ \text{ et } \ J = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

sont convergentes toutes les deux. Montrer ensuite que $I = 2J = \pi$.

FEUILLE D'EXERCICES 8
SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1 Etudier la nature des séries de terme général:

1) $u_n = \frac{1}{n!}$, 2) $u_n = \frac{n!}{n^n}$, 3) $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, 4) $u_n = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^{-n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 Etudier la nature des séries de terme général:

a) $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ b) $u_n = \frac{na^n}{n^2+1}$, $a > 0$ c) $u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$, d) $u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e)$u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$
f)$u_n = \frac{n-1}{n^2+2n+1}$ g) $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ h) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

i) $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ j) $u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n$ k) $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{\operatorname{Arc\,tan}(t)}{\sqrt{t}}\, dt$ l) $u_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$

m) $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ n) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ o) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ p) $u_n = (-1)^n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right]$.

Exercice 3 Etudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général:

a) $u_n = \frac{1}{n^2-1}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}$

b) $u_n = \ln\left(\cos \frac{1}{2^n}\right)$ c) $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$.

Exercice 4 Etudier la nature de la série dite de Bertrand

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Cas $\alpha = 1$. Montrer qu'il y a convergence ssi $\beta > 1$.

2) Cas $\alpha > 1$. Convergence.

3) Cas $\alpha < 1$. Divergence

FEUILLE D'EXERCICES 9
SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$1)\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^n},\quad 2)\sum_{n\geq 0}n^n x^n,\quad 3)\sum_{n\geq 1}\ln(n)x^n,\quad 4)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}x^n,\quad 5)\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^2}x^n,\quad 6)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\ln(n!)}x^n,$$

$$7)\sum_{n\geq 1}\cos(\frac{1}{n})x^n,\quad 8)\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^4}\quad 9)\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^{n+1}}x^n,\quad 10)\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{\ln(e^n+n+1)}x^n,\quad 11)\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)x^n,$$

Exercice 2 Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$a)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{3^n+n}x^n,\quad b)\ \sum_{n\geq 1}(1+\frac{a}{n})^{n^2}x^n,\quad c)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}x^n,\quad d)\ \sum_{n\geq 0}(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})x^n.$$

Exercice 3 Donner le développement en séries entières des fonctions suivantes et indiquer les rayons de convergence.

$$1)\ \frac{1}{1+x^2},\quad 2)\ \arctan(x),\quad 3)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad 4)\ \arcsin(x),\quad 5)\ e^{-x^2},$$
$$6)\ \frac{1}{2+3x},\quad 7)\ \frac{3x-2}{(2x+1)(x-3)},\quad 8)\ \sin(3x)+x\cos(3x),\quad 9)\ \ln(1-\frac{x}{2x^2-1})$$

Exercice 4 Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}n^2x^n$. Etudier la convergence de la série en $x=\pm R$. (Indication: pour calculer la somme on pourra utiliser que $n^2=n(n-1)+n$).

Exercice 5 Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Etudier la convergence de la série en $x=\pm R$.

Exercice 6 Développer en série entière les fonctions

$$a)\ \frac{1}{1+x^4},\quad b)\ e^{x^2},\quad c)\ \frac{x+2}{1-x^2},\quad d)\ \frac{4-3x}{(1-x)^2}$$

Exercice 7 Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x)=\ln(x^2-5x+6),$$

et préciser le rayon de convergence R.

Exercice 8 En considérant la série de fonction $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Exercice 9 Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),$$

et préciser le rayon de convergence R.

Exercice 10
Montrer qu'il existe pour les deux équations différentielles suivantes des solutions développables en séries entières. Déterminer le rayon de convergence des séries obtenues et calculer leur somme.

1. $x^2y^{''} + x(x+1)y^{'} - y = 0$.
2. $xy^{''} + 2y^{'} + xy = 0$.

Exercice 11 Chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle

$$y^{''}(x) - 2xy^{'}(x) - 2y(x) = 0,$$

vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y^{'}(0) = 0$.

Exercice 12 Chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle

$$y^{''} + xy^{'} + y = 0, \text{ vérifiant les conditions } y(0) = 1 \text{ et } y^{'}(0) = 0.$$

Exercice 13

1. Chercher les fonctions y développables en série enitère au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle
$$x^2y^{''} - x(x+6)y^{'} + 3(x+4)y = 0$$
2. Chercher les fonctions y développables en 0, solution de l'équation différentielle
$$(1+x^2)y^{''} + 2xy^{'} - 2y = 2$$
3. Chercher les fonctions y développables en 0, solution de l'équation différentielle
$$x^2y^{''} - x(x+4)y^{'} + 2(x+3)y = 0$$
4. Chercher les fonctions y développables en 0, solution de l'équation différentielle
$$x^2(1+x)y^{''} - x(x+2)y^{'} + (x+2)y = 0$$

FEUILLE D'EXERCICES 10
SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, de période 2π telle que $\begin{cases} f(t) = t & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ f(t) = \pi - t & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$

a) Vérifier que f est continue par morceaux et calculer ses coefficients de Fourier.

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

c) En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2 Donner le développement en série de Fourier de f, de période 2π telle que $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi; \pi]$.
En déduire les sommes des deux séries suivantes : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$

Exercice 3 Donner le développement en série de Fourier de la fonction f, de période 2π telle que

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad -\pi < x \leq 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

En déduire les sommes des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$

Exercice 4 On considère la fonction f, 2π-périodique définie par $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \pi]$ et $f(x) = 0$ sur $]\pi, 2\pi]$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $b_n = 0$.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2}$.

Exercice 5 On considère la fonction f, $2\pi-$périodique définie par $f(x) = x^2 - \pi^2$ sur $[-\pi, \pi]$

1. Donner la série de Fourier de f

2. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice 6 On considère la fonction f, $2\pi-$ périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$ et prolongée par imparité sur $[-\pi, \pi]$.

1. Donner la série de Fourier de f.

2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Exercice 7 On considère la fonction f, $2\pi-$périodique et impaire définie par $f(x) = 1 - \cos(x)$ sur $[0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x = \pi$.

1. Donner la série de Fourier de f.

2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 8 Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f de période 2π telle que

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \forall x \in]0, \pi]$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Exercice 9 Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ |\sin(x)| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2(nx)$