Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Devoir Surveillé du 19 mars 2016

(durée 1h00)

- ☞ Indiquez vos nom, prénom et groupe. Les copies anonymes ne seront pas corrigées.
- ☞ Toutes les réponses seront données sur le sujet, dans les cadres dédiés à chaque réponse. Ce qui sera rédigé dans le mauvais cadre, au dos du sujet, sur une feuille supplémentaire ou de brouillon ne sera pas pris en compte.
- ☞ Il est donc vivement conseillé d'utiliser un brouillon avant de remplir les cadres.
- ☞ Toute réponse devra être dûment justifiée à l'aide des notations probabilistes vues en cours et en citant les hypothèses nécessaires. Aucune rédaction "intuitive" ne sera acceptée.
- ☞ **P.J. : table de Poisson et table de la loi normale.**

Exercice 1 : Un technicien teste des cartes électroniques en les prélevant dans des boites contenant chacune 6 cartes dont 2 sont défectueuses. Pour ce faire il prélève successivement deux cartes au hasard dans la boite. Puis il passe à la boite suivante, et caetera. On suppose les tirages indépendants et on note pour $i \geq 1$, la variable X_i valant 1 si le tirage donne deux cartes défectueuses et 0 sinon.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir 2 cartes défectueuses lors d'un prélèvement de 2 cartes vaut $p = 1/15$.

2. On effectue 150 premiers tirages. Déterminer en justifiant la loi du nombre X de tirages où les deux cartes prélevées sont défectueuses,

   ainsi que sa valeur moyenne :

3. En utilisant une approximation par une loi de Poisson de même espérance que la loi précédente, calculer la probabilité qu'au moins 15 tirages contiennent deux cartes défectueuses (voir tables en fin de sujet).

Exercice 2 : Soit deux réels α et c, avec $\alpha > 0$ fixé, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} c\,x\,e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de c pour laquelle f est une densité.
   Dans la suite X désignera une variable aléatoire de densité f.

2. Calculer :

$\mathrm{P}(X = 1) =$
$\mathrm{P}(\vert X\vert > 1) =$

3. En appliquant le théorème du changement de variable montrer que la variable $Y = X^2$ suit une loi exponentielle (on prendra $\mathcal{U} = \mathcal{V} =]0; +\infty[$ et $g(x) = x^2$) :

En déduire l'espérance de la variable X^2 :

<u>Exercice 3</u> : Soit N une v.a.r. à densité de densité $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On note les deux variables $X = 1 + 2N$ et $Y = e^X$.

1. Quelles lois suivent les variables N, X et Y ?

Donner sans calcul l'espérance et la variance de X :

2. Calculer $\mathrm{P}(X > 0)$:

et $\mathrm{P}(Y \leq e^2)$:

3. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Calculer à l'aide du théorème du transfert l'espérance $\mathrm{E}(e^{m+\sigma N})$.

En déduire $\mathrm{E}(Y)$:

4. Déterminer sans calcul la loi de la variable Y^2 :

Déduire de la question précédente l'espérance de Y^2, puis la variance de Y.

Table de la fonction de répartition de la loi de Poisson

Table fournissant $\mathrm{P}(X \leq x)$ en fonction du paramètre λ de la loi de Poisson. Pour $\lambda = 2$, on a donc $P(X \leq 1) = 0,4060$.

x\\λ	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

x\\λ	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404
2	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247
3	0,9810	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650
4	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405
5	0,9994	0,9955	0,9834	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160
6	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622
7	1,0000	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666
8	1,0000	1,0000	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319
9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682
10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863
11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9993
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

x\\λ	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
0	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
2	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001
3	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103	0,0049	0,0023	0,0011	0,0005
4	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293	0,0151	0,0076	0,0037	0,0018
5	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671	0,0375	0,0203	0,0107	0,0055
6	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301	0,0786	0,0458	0,0259	0,0142
7	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202	0,1432	0,0895	0,0540	0,0316
8	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328	0,2320	0,1550	0,0998	0,0621
9	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579	0,3405	0,2424	0,1658	0,1094
10	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830	0,4599	0,3472	0,2517	0,1757
11	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968	0,5793	0,4616	0,3532	0,2600
12	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916	0,6887	0,5760	0,4631	0,3585
13	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645	0,7813	0,6815	0,5730	0,4644
14	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165	0,8540	0,7720	0,6751	0,5704
15	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513	0,9074	0,8444	0,7636	0,6694
16	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730	0,9441	0,8987	0,8355	0,7559
17	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857	0,9678	0,9370	0,8905	0,8272
18	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928	0,9823	0,9626	0,9302	0,8826
19	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965	0,9907	0,9787	0,9573	0,9235
20	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9953	0,9884	0,9750	0,9521

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Pour t fixé, la table donne la valeur de $\Phi(t) = \int_{\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Remarque : Pour $t < 0$, $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

Table de $1 - \Phi(t)$ pour les grandes valeurs de t

t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	135.10^{-5}	9678.10^{-6}	687.10^{-6}	$483,5.10^{-6}$	337.10^{-6}	233.10^{-6}	159.10^{-6}	108.10^{-6}	724.10^{-7}	481.10^{-7}
4	317.10^{-7}	207.10^{-7}	$133,5.10^{-7}$	855.10^{-8}	542.10^{-8}	340.10^{-8}	2115.10^{-8}	130.10^{-8}	794.10^{-9}	480.10^{-9}
5	287.10^{-9}	170.10^{-9}	998.10^{-10}	580.10^{-10}	334.10^{-10}	190.10^{-10}	1075.10^{-10}	601.10^{-11}	333.10^{-11}	182.10^{-11}