1 Rappels sur les variables discrètes

Exercice 1.1 Un joueur effectue 5 lancers indépendants d'une pièce $Pile - Face$. Pour chaque lancer, la probabilité d'obtenir un Pile vaut $p = \frac{1}{3}$. On note X le nombre de $Pile$ obtenus sur les 5 lancers.

1. En rappelant en détail le schéma de Bernoulli utilisé mais sans démonstration, justifier que X suit une loi binômiale. Calculer son espérance et sa variance.
2. Rappeler la forme générale de la loi $\mathrm{P}(X = k)$ pour $k = 0, \ldots, 5$ puis calculer la probabilité d'obtenir respectivement 2 $Pile$, au moins un $Pile$. Quelle loi suit la variable $Y = 5 - X$?
3. Le joueur gagne 3 euros par $Face$ obtenu et perd 1 euro pour chaque $Pile$ obtenu. On note B son bénéfice. Exprimer B en fonction de X, puis déterminer si en moyenne le jeu lui est favorable.

Exercice 1.2 Chaque jour ou l'on met en route un appareil, il y a une chance sur 1000 que celui-ci tombe en panne (les essais sont indépendants). On note X le rang de la première fois où la panne a lieu. On note pour $i \in \mathbb{N}^*$, X_i la v.a. valant 1 si l'appareil tombe en panne au i-ième essai et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X (on pourra s'aider des X_i), ainsi que sa valeur moyenne et sa variance
2. Pendant quelle période maximale peut-on garantir qu'une panne n'arrivera pas avec une probabilité d'au moins 90% ?

Exercice 1.3 Un loueur possède 10 véhicules. Il a constaté que la demande N de véhicules loués pour la journée suit une loi de Poisson et qu'en moyenne sur cette période 5 véhicules sont loués. Pour certaines des questions de cet exercice on pourra utiliser la table de répartition de la loi de Poisson en fin de sujet.

1. Que vaut la probabilité qu'aucun véhicule ne soit loué ? Qu'un véhicule soit loué ?
2. Qu'au moins 5 véhicules soient loués.
3. Quelle est la probabilité que le loueur ne puisse satisfaire la demande ?

Exercice 1.4 Chaque fois que Christophe tire sur la cible il a une chance sur 10 de l'atteindre. La deuxième fois qu'il la touche la cible tombe. On note X le rang du lancer où il atteint la cible pour la deuxième fois et pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, on note Y_i la v.a.r. valant 1 si Christophe touche la cible au i-ième lancer et 0 sinon. On suppose les lancers indépendants.

1. Pour $n \geq 2$ fixé :
   (a) Exprimer l'évènement $\{X = n\}$ en fonction des évènements $\{Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = 1\}$ et $\{Y_n = 1\}$. Ces évènements sont-ils indépendants ?
   (b) Quelle loi suit la variable $Y_1 + \cdots + Y_{n-1}$? En déduire $\mathrm{P}(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = 1)$.
   (c) Montrer que
   $$\mathrm{P}(X = n) = (n-1)(1-p)^{n-2}p^2$$
   avec $p = 0{,}1$.
2. On rappelle que pour $x \in]0; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. En dérivant deux fois cette série terme à terme montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
3. En déduire que l'on obtient bien une loi de probabilité et que $\mathrm{E}(X) = \frac{2}{p}$.

2 Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 2.1 Soit F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1/2 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$$

Vérifier que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. X et déterminer la loi de X.

Exercice 2.2 Soit F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{4} & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

1. Vérifier que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité X et déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathrm{P}(-1 \leq X \leq 3)$.

Exercice 2.3 Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Dans la suite X une v.a.r. de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
4. Déterminer $\mathrm{P}\left(|X| > 0{,}5\right)$.

Exercice 2.4 (Loi de Rayleigh) Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ k\, x.e^{-x^2/2} & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle valeur de k, f est-elle une densité de probabilité ? Dans la suite k sera égal à la valeur en question.
2. Calculer $\mathrm{P}\left(1 \leq X \leq 2\right)$.
3. Soit X une var admettant f comme densité. Déterminer la loi de $Y = X^2$, ainsi que sa densité. Conclusion ? En déduire $E(Y)$ sans calcul.

Exercice 2.5 (Loi de Pareto). Soit r et k deux nombres strictement positifs. On note f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < r$ et $f(x) = kr^k/x^{k+1}$ si $x \geq r$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Cette densité est appelée densité de Pareto.
2. Pour quelles valeurs de k une variable aléatoire X de densité f est-elle intégrable ? de carré intégrable ?
3. On admet que la répartition du revenu X suit une loi de Pareto. Déterminer la fonction de répartition de X, en déduire le revenu *médian* $\bar{r}$, et exprimer le paramètre k à l'aide du revenu minimum r et de $\bar{r}$.

Exercice 2.6 Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer $\mathrm{P}(1 \leq X < 3)$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X > t)$ et $\mathrm{P}(X \geq t)$.
2. En déduire que pour $t > 0$ et $s > 0$, on a $\mathrm{P}(X \geq t+s \mid X \geq s) = P(X \geq t)$ (On dit que la loi exponentielle est sans mémoire).

Exercice 2.7 Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Déterminer la densité de la v.a.r. $Y = \frac{-ln(X)}{\lambda}$ sans calculer explicitement sa fonction de répartition.

Exercice 2.8 Déterminer le réel α tel que $f : x \mapsto \alpha e^{-|x|}$ soit une densité de probabilité. Calculer alors l'espérance et la variance associées à cette loi.(Première loi de Laplace.)

Exercice 2.9 On tire un nombre N au hasard selon la loi uniforme sur $[0; 1]$.

1. Déterminer la probabilité que N appartienne à l'intervalle $[0; 0{,}1[$, $[0{,}1; 0{,}2[$, etc...
2. En déduire la loi du premier chiffre de N après la virgule.

Exercice 2.10 On considère un carré donc le côté X est une v.a.r. uniformément distribuée entre 2 cm et 3 cm, et on note S la surface de ce carré. Calculer la moyenne et la variance de X et S (on calculera des expressions du type $\mathrm{E}(X^k)$).

3 Lois normales, log-normales

Exercice 3.1 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2)$. avec $m = 1$ et $\sigma = 0{,}4$.

1. Lecture directe : calculer $\mathrm{P}(X < 1{,}91)$, $\mathrm{P}(X > 0{,}82)$, $\mathrm{P}(0{,}82 < X < 1{,}91)$.
2. Lecture inverse : trouver les valeurs approchées de t telles que $\mathrm{P}(X < t) = 0{,}674$, $\mathrm{P}(X \geq t) = 0{,}791$, $\mathrm{P}(|X - 1| < t) = 0{,}866$.

Exercice 3.2 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2)$.

1. Sachant que $Var\,(X) = 4$ et $\mathrm{P}(X > 2) = 0{,}4$ calculer $\mathrm{E}(X)$.
2. Sachant que $\mathrm{E}(X) = -2{,}5$ et $\mathrm{P}(X < 0) = 0{,}9$ calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 3.3 1. Soit X une gaussienne centrée réduite et λ un nombre réel. Calculer $\mathrm{E}\left(e^{\lambda X}\right)$.

2. Dans certains modèles financiers, le cours d'une action à une date future T est une v.a.r. S_T qui suit une loi log-normale, c'est-à-direque S_T est de la forme $S_T = S_0 e^Z$, où $S_0 > 0$ est une constante appelée cours spot et Z suit une v.a.r. suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelle condition doivent-elles vérifier m et σ pour que $\mathrm{E}\,(S_T) = S_0$? Calculer alors la variance de S_T en fonction de σ.

Exercice 3.4 (Loi log-normale) On dit qu'une variable Y suit une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement sila variable $X = \ln Y$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

1. Montrer que $X = m + \sigma N$ avec N dont on précisera la loi. Déterminer une densité de Y.
2. Calculer $\mathrm{P}(0 \leq Y \leq 4)$ pour $\mu = 1$, $\sigma^2 = 2$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3.5 Soit une v.a.r. X qui suit une loi log-normale de paramètres (μ, σ^2) $(\sigma > 0)$. Déterminer la loi de la v.a.r. $Y = \dfrac{1}{X}$.

Exercice 3.6 Soit une v.a.r. X qui suit une loi normale centrée réduite et Y une v.a.r. telle que $\mathrm{P}(Y = 1) = \mathrm{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer la loi de la v.a.r. $Z = XY$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 4.1 Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$, ainsi que la densité associée.

Exercice 4.2 Un marchand de jouets suppose que le temps T en semaines que chaque jouet reste dans sa boutique suit une loi exponentielle. Commenter l'hypothèse faite sur T (mémoire). Sachant qu'un article a 50% de chances d'être vendu en quatre semaines, déterminer le paramètre de cette loi et calculer la probabilité qu'un jouet reste entre cinq et six semaines dans cette boutique.

Exercice 4.3 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2)$. Soit $b > 0$ fixé.

Déterminer x tel que $\mathrm{P}(x < X < x + b)$ soit maximale. (On pourra étudier $f(x) = \mathrm{P}(x < X < x + b)$).

Exercice 4.4 Un lot contient des pièces défectueuses dont le nombre$X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$. On suppose que $\mathrm{P}(X \leq 235) = 58\%$ et $\mathrm{P}(X \geq 204) = 4\%$. Déterminer m et σ.

1 Couples de v.a. discrètes, lois marginales, conditionnelles, espérance conditionnelle

Exercice 1.1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$p/4$	$q/4$	$p/4$
0	$q/8$	?	$q/8$
1	$p/4$	$q/4$	$p/4$

avec $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Calculer $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0)$ et les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathrm{E}(XY)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 1.2 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, donnée par

$$\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X = -1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer la loi du couple $(X + Y, XY)$, ses lois marginales, $\mathrm{E}(X + Y)$ et $\mathrm{E}(XY)$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, X + Y)$. Les variables aléatoires X et $X + Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 1.3 Soit les points $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ et $D(-1; 0)$. On choisit au hasard un point parmi les points A, B, C, D et on note ses coordonnées (X, Y)

1. Déterminer la loi de conjointe de (X, Y) puis les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Remarque ?

Exercice 1.4 Un péage comprend deux guichets 1 et 2. Les nombres de clients, respectivement X_1 et X_2, passant par les guichets pendant une durée donnée sont suppoés indépendants et suivent des lois de Poisson de moyennes $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On note $X = X_1 + X_2$ le nombre de clients passant par le péage.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X = n$. Remarque ?
3. Déterminer $\mathrm{E}(X_1 \,|\, X)$ et vérifier le résultat en retrouvant $\mathrm{E}(X_1)$.

Exercice 1.5 Soit (X_i) une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, intégrables et d'espérance μ, et N une variable intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = n) \neq 0$. On suppose N indépendante de la suite (X_i) et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance conditionnelle de S_N sachant $N = n$ et en déduire $\mathrm{E}(S_N \mid N)$ et $\mathrm{E}(S_N)$.
2. On suppose que le nombre d'oeufs pondus par une grenouille suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que chaque oeuf a une probabilité $p \in]0; 1[$ d'arriver à éclosion. On note N le nombre d'oeufs pondus et X le nombre d'oeufs éclos.
   (a) Déterminer $\mathrm{E}(X)$.
   (b) Calculer la loi la loi conditionnelle puis l'espérance conditionnelle de X sachant N.
3. Dans la question 2 peut-on dire si S_N et N sont indépendantes ?

Exercice 1.6 On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce avec $\mathrm{P}(Pile) = p \in]0; 1[$ à chaque lancer. On note N le rang du premier Pile et on lance ensuite la même pièce N fois en notant X le nombre de Pile obtenus.

1. Déterminer $\mathrm{E}(X \mid N = n)$ puis $\mathrm{E}(X \mid N)$ et enfin $\mathrm{E}(X)$
2. Déterminer la loi de X et retouver le résultat précédent.

2 Couples v.a. continues

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni du repère orthonormé habituel.

Exercice 2.1 Soit les 4 points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$ et on considère le couple (X,Y) de var. de loi uniforme sur le carré $\mathscr{C} = (ABCD)$.

1. Faire un schéma et déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathrm{P}(0 < Y < 2X)$.

Exercice 2.2 Soit $\lambda > 0$ et la fonction définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$.

1. Vérifier que f est une densité sur $\mathbb{R}^2$. Dans la suite (X,Y) est un couple de var de densité f.
2. Déterminer les lois des variables X et Y. Les var. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$, $\mathrm{P}(Y < X)$ et $\mathrm{P}(Y < X/2)$.

Exercice 2.3 Soit $\lambda, \mu > 0$ et (X_1, X_2) un couple de var à densité indépendantes de loi respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$.

1. Calculer $\mathrm{P}(X_1 = X_2)$ et $P(X_1 < X_2)$.
2. Déterminer les lois de $Y = \mathrm{Inf}(X_1, X_2)$, $Z = \mathrm{Sup}(X_1, X_2)$.

Exercice 2.4 Soit (X,Y) un couple de var à densité indépendantes de même loi. Calculer la densité de la var. $Z = X + Y$ si X et Y suivent la loi : a) $\mathcal{U}_{[0;1]}$ b) $\mathcal{N}(0;1)$

Exercice 2.5 Soit $f(x,y) = 2\,\mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq x \leq 1\}}$.

1. Montrer que f est la densité d'un couple de variables. Soit (X,Y) un couple de variables de densité f.
2. Déterminer $\mathrm{P}(X < Y)$ et $\mathrm{P}(Y > X)$.
3. Déterminer $\mathrm{E}(XY)$ puis $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 2.6 Soit $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, et deux variables indépendantes, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma_1^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma_2^2)$. On pose $Z = X + Y$.

1. Montrer que $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(t-x)^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}t\right) + \frac{t^2}{\sigma^2}$ avec $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.
2. En déduire la loi de Z
3. Généraliser au cas où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1;\sigma_1^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2;\sigma_2^2)$

9 Statistiques à une variable

Exercice 9.1 Voici les relevé des scores d'une population de tireurs lors d'une campagne de tirs. La tableau montre le nombre de tirs résussis sur 10 tirs :

Tirs au but	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Nbre de tireurs	3	15	9	11	8	4	2

1. Compléter le tableau avec les effectifs cumulés croissants. Déterminer la médiane et la moyenne de la distribution. Quels sont les avantages comparatifs de ces 2 paramètres de position ?
2. Déterminer la variance et l'écart-type de cette série.

Exercice 9.2 Dans une région l'étude des exploitations agricoles a conduit au tableau suivant représentant le nombre d'exploitations en fonction de leur surface en hectare :

Surface en ha	**[0 ;2[**	**[2 ;3[**	**[3 ;4[**	**[4 ;5[**	**[5 ;6[**
Nbre d'exploit.	15	25	30	30	5

1. Déterminer la population, caractère, type de caractère, ...
2. Déterminer la médiane de la série.
3. Calculer la moyenne de la série ainsi que sa variance et son écart-type.

Exercice 9.3 Un service des ressources humaines fait une étude statistique sur sa masse salariale S et trouve une moyenne de 37000 € et un écart-type de 700 €. Pour faciliter les calculs le service pose $Y = (S - 35000)/1000$. Que valent la moyenne, variance et l'écart-type de cette nouvelle série ?

Exercice 9.4 Le nombre de clients dans une boutique par jour sur une semaine donnée est fourni par le tableau suivant :

Jour	**lun**	**mar**	**mer**	**jeu**	**ven**	**sam**
Nbre de clients	23	42	38	41	55	51

On étudie le caractère nombre de clients. Déterminer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série.

10 Statistiques à deux variables

Exercice 10.1 100 fruits testés sont triés en fonction de leur poids en g et de leur qualité ("accepté" ou "rejeté").

Qual. / Poids	Accepté	Rejeté
$[200; 240[$	8	23
$[240; 280[$	7	45
$[280; 360[$	4	13

1. Déterminer les caractères et types de caractères étudiés.
2. Déterminer la distribution de la variable "Poids" ainsi que le poids médian.
3. Déterminer la proportion de pommes entre 240 et 280 g pour chacune des deux qualités. Les variables "Poids" et "Qualité" sont-elles indépendantes ?
4. Peut-on dire d'après de test du khi-2 que la qualité est indépendante du poids au risque $\alpha = 5\%$?

Exercice 10.2 Le tableau suivant présente le résultat d'une enquête sur les trajet domicile-travail dans une entreprise suivant le mode choisi et le temps passé en heure.

Temps / Mode	$[0; 0,5[$	$[0,5; 1[$	$[1; 2[$
Transport collectif	0,05	0,09	0,14
Transport individuel	0,25	0,24	0,23

1. Déterminer le temps moyen pour chacun des deux modes de transport.
2. On suppose que l'enquête a été réalisée sur un échantillon de 1000 personnes. Peut-on dire d'après de test du khi-2 que la qualité est indépendante de l'unité de production au risque $\alpha = 5\%$?

Exercice 10.3 Voici les résultats d'une enquête sur les intentions de vote pour trois listes en fonction de la classe d'âge :

Liste \ Temps	$[18; 35[$	$[35; 50[$	$[50; 80[$
Vers l'avenir	110	113	145
Pour la démocratie	127	120	220
En avant	57	41	67

1. Déterminer la proportion de personnes entre 18 et 35 ans pour chacune des listes. Les variables sont-elles indépendantes ?
2. D'après de test du khi-2, les intentions de vote sont-elles indépendantes de l'âge au risque $\alpha = 5\%$?

Exercices de statistiques

11 Tests d'adéquation à une loi

Exercice 11.1 Dans une petite ville on recense pendant une année les nombres de naissances suivants :

Saison	Printemps	Été	Automne	Hiver
Naissances	27	20	8	33

A l'aide d'un test, déterminer si au risque de $1^{\text{ère}}$ espèce $\alpha = 5\%$, on peut affirmer que le nombre des naissances est indépendant de la saison.

Exercice 11.2 Au cours d'un contrôle qualité, un technicien a effectué les relevés suivants :

Nbre de défauts	0	1	2	3	4	5
Nbre pièces	11	13	14	10	2	0

Le technicien sait que le nombre de défaut suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer le nombre moyen de défauts et en déduire une estimation de λ (on ne tient pas compte de la dernière classe).
2. Tester l'ajustement de l'échantillon à cette loi au risque de $1^{\text{ère}}$ espèce $\alpha = 5\%$.

Exercice 11.3 Un générateur de nombre aléatoires génère des nombres selon une loi uniforme entre 1 et 2. Voici un échantillon produit :

$$1{,}42 \quad 1{,}89 \quad 1{,}39 \quad 1{,}77 \quad 1{,}4 \quad 1{,}8 \quad 1{,}75 \quad 1{,}38 \quad 1{,}22 \quad 1{,}79$$

En utilisant le test de K-S, pouvez-vous dire si ce générateur est fiable au risque de $1^{\text{ère}}$ espèce $\alpha = 5\%$?

Exercice 11.4 Voici 6 notes de DS parmi des copies corrigées par un enseignant :

$$10.5 \quad 3 \quad 9 \quad 7 \quad 12 \quad 16$$

Celui-ci affirme que les notes suivent une loi normale de moyenne $m = 10$ et d'écart-type $\sigma = 4$. En utilisant le test de K-S, pouvez-vous dire d'après cet échantillon si son affirmation est fiable au risque de $1^{\text{ère}}$ espèce $\alpha = 5\%$?

Table du khi-2

df	P 0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
31	14.46	15.66	17.54	19.28	21.43	25.39	30.34	35.89	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00	61.10
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	26.30	31.34	36.97	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33	62.49
33	15.82	17.07	19.05	20.87	23.11	27.22	32.34	38.06	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65	63.87
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	28.14	33.34	39.14	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96	65.25
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	29.05	34.34	40.22	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	66.62
36	17.89	19.23	21.34	23.27	25.64	29.97	35.34	41.30	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58	67.98
37	18.59	19.96	22.11	24.07	26.49	30.89	36.34	42.38	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88	69.35
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	31.81	37.34	43.46	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18	70.70
39	20.00	21.43	23.65	25.70	28.20	32.74	38.34	44.54	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48	72.06
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	119.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6	173.6
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	139.3	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8	197.4
160	117.7	121.3	126.9	131.8	137.5	147.6	159.3	171.7	183.3	190.5	196.9	204.5	209.8	221.0
180	134.9	138.8	144.7	150.0	156.2	166.9	179.3	192.4	204.7	212.3	219.0	227.1	232.6	244.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	199.3	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3	267.5
240	187.3	192.0	199.0	205.1	212.4	224.9	239.3	254.4	268.5	277.1	284.8	293.9	300.2	313.4
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	299.3	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8	381.4
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	399.3	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6	493.1

n	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,02	α = 0,01
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,359	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,486
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432
14	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418
15	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404
16	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392
17	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381
18	0,244	0,279	0,309	0,346	0,371
19	0,237	0,271	0,301	0,337	0,361
20	0,232	0,265	0,294	0,329	0,352
21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
22	0,221	0,253	0,281	0,314	0,337
23	0,216	0,247	0,275	0,307	0,330
24	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
25	0,208	0,238	0,264	0,295	0,317
26	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311
27	0,200	0,229	0,254	0,284	0,305
28	0,197	0,225	0,250	0,279	0,300
29	0,193	0,221	0,246	0,275	0,295
30	0,190	0,218	0,242	0,270	0,290
35	0,177	0,202	0,224	0,251	0,269
40	0,165	0,189	0,210	0,235	0,252
45	0,156	0,179	0,198	0,222	0,238
50	0,148	0,170	0,188	0,211	0,226
n>50	$1{,}07/\sqrt{n}$	$1{,}22/\sqrt{n}$	$1{,}36/\sqrt{n}$	$1{,}52/\sqrt{n}$	$1{,}63/\sqrt{n}$