

Lois de probabilité usuelles

Généralités

Fonction de répartition d'une loi discrète

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, sa fonction de répartition est égale à

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \leq x}} P(X = x_i)$$

Fonction de répartition d'une loi continue

Si X est une variable aléatoire de densité f , sa fonction de répartition est égale à

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On a alors $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

et sa densité vaut $f(x) = F'_X(x)$

Probabilités du min et du max

Si les variables T_i sont indépendantes,

$$P(\max T_i \leq x) = \prod_{i=1}^n P(T_i \leq x)$$

$$P(\min T_i \leq x) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(T_i \leq x)]$$

Espérance et variance dans le cas discret

Si X est une variable aléatoire discrète,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(X = k)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Espérance et variance dans le cas continu

Si X est une variable aléatoire continue de densité f ,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x) dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Si X et Y sont deux variables aléatoires et a un réel,

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Important : toujours calculer à l'intérieur de l'espérance avant de séparer les termes. Par exemple,

$$E((X - a)^2) = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2aE(X) + a^2$$

Si les X_i sont des variables aléatoires,

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

et si elles sont indépendantes,

$$V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Principales lois discrètes

Loi uniforme

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$P(X = x_i) = 1/n$$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \text{ paramètre } p$$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p, V(X) = p(1 - p)$$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}, \text{ paramètre } p$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = np, V(X) = np(1 - p)$$

Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, N_A)$

On effectue n tirages sans remise dans une urne contenant N objets dont $N_A \geq n$ objets de type A. X est le nombre d'objets de type A obtenus.

$$X(\Omega) = \{1, \dots, n\}, \text{ paramètres } N, n \text{ et } N_A \text{ (} p = N_A/N \text{)}$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{N_A}{k} \binom{N - N_A}{n - k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = np, V(X) = np(1 - p)(N - n)/(N - 1)$$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$X(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ paramètre } \lambda$$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda, V(X) = \lambda$$

Loi géométrique

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \text{ paramètre } p$$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$E(X) = 1/p, V(X) = (1 - p)/p^2$$

Principales lois continues

Loi uniforme $\mathcal{U}(a, b)$

$$X(\Omega) = [a; b], \text{ paramètres } a \text{ et } b$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b - a) & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = (a + b)/2, V(X) = (b - a)^2/12$$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

$$X(\Omega) = \mathbb{R}^+, \text{ paramètre } \lambda$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/\lambda e^{-x/\lambda} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = 1/\lambda, V(X) = 1/\lambda^2$$

Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$

$$X(\Omega) = \mathbb{R}, \text{ paramètres } m \text{ (moyenne) et } \sigma \text{ (écart-type)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = m, V(X) = \sigma^2$$

Loi du khi-deux χ_n^2

$$X(\Omega) = \mathbb{R}^+, \text{ paramètre } n \text{ (degré de liberté)}$$

$$E(X) = n, V(X) = 2n$$

Loi de Student T_n

$X(\Omega) = \mathbb{R}$, paramètre n (degré de liberté)

$E(X) = 0$ pour $n > 1$, $V(X) = n/(n-2)$ pour $n > 2$

Relations entre les principales lois

Propriétés

Si les variables X_i suivent une loi $\mathcal{B}(p)$ et sont indépendantes, alors la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si les variables X_i suivent une loi $\mathcal{P}(\lambda_i)$ et sont indépendantes, alors la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi $\mathcal{P}(\sum \lambda_i)$.

Si la variable X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la variable $Y = aX + b$ suit une loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

Si la variable X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la variable $Y = (X - m)/\sigma$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En particulier, $P(X \leq u) = P(Y \leq (u - m)/\sigma)$.

Approximations (voir chapitre 2)

Si $n \geq 30$ et $np < 5$, on peut approcher une loi $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi $\mathcal{P}(np)$.

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, alors on peut approcher une loi $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Si $N \geq 10n$, on peut approcher une loi $\mathcal{H}(N, n, pN)$ par une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si λ est assez grand, on peut approcher une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par une $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Si n est assez grand, on peut approcher une loi χ_n^2 par une loi $\mathcal{N}(n, \sqrt{2n})$.

Si n est assez grand, on peut approcher une loi T_n par une loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{1})$.

Lois normale, du χ^2 et de Student (voir chap. 1)

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $X_1^2 + \dots + X_n^2 \rightsquigarrow \chi_n^2$.

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, Y suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté et X et Y sont indépendantes, alors $Z = \sqrt{n}X/\sqrt{Y}$ suit une loi de Student à n degrés de liberté.

Cas particuliers importants (moments empiriques) :

Moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Variance empirique

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightsquigarrow \chi_n^2$.

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $Z_n = \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \chi_n^2$.

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$(n-1)S_n^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \chi_{n-1}^2$$

(car les $X_i - \bar{X}_n$ sont liées par une relation : leur somme vaut 0 puisque $\bar{X}_n = \sum X_i/n$).

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \rightsquigarrow T(n-1)$.

Utiliser les tables statistiques

Loi normale centrée réduite

La table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donne les valeurs de $P(X \leq u)$ pour u positif donné. Pour déterminer d'autres valeurs, on utilise les formules suivantes :

$$P(X > u) = 1 - P(X \leq u)$$

$$P(u < X < v) = P(X < v) - P(X \leq u)$$

$$P(|X| \leq u) = P(-u \leq X \leq u)$$

$$P(|X| \geq u) = 2P(X \geq u)$$

$$P(X^2 \leq u) = P(|X| \leq \sqrt{u})$$

Pour u négatif, on utilise

$$P(X \leq u) = P(X > -u) = 1 - P(X \leq -u)$$

On peut également utiliser la table « à l'envers », pour déterminer u tel que $P(X \leq u) = p$ pour p donné.

Loi de χ^2

La table de la loi de χ^2 donne la valeur u telle que $P(X \geq u) = p$ pour p donné. Pour déterminer u telle que $P(X \leq u) = p$ pour p donné, on utilise la formule

$$P(X > u) = 1 - P(X \leq u) = 1 - p$$

et on cherche dans la table la valeur u correspondant à $1 - p$.

Lorsque l'on cherche deux valeurs u_1 et u_2 telles que $P(u_1 \leq X \leq u_2) = p$, on considère un intervalle symétrique et on cherche u_1 et u_2 tels que $P(X \geq u_2) = p/2$ et $P(X \geq u_1) = 1 - P(X < u_1) = 1 - p/2$.

Loi de Student

La table de la loi de Student donne la valeur de u telle que $P(|X| > u) = p$ pour p donné. Pour trouver la valeur de u telle que $P(-u \leq X \leq u) = p$ pour p donné, on cherche la valeur de u telle que $P(|X| > u) = 1 - p$.