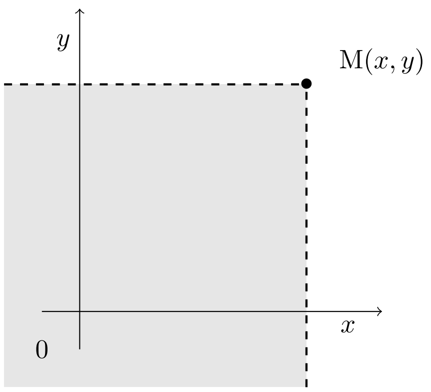
Lois multidimensionnelles

Couples de variables aléatoires continues

Loi d'un couple

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles continues, sa fonction de répartition est définie par

$$\begin{cases} \mathrm{F} : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0\,;1] \\ & (x,y) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}<x, \mathrm{Y}<y) \end{cases}$$



F(x, y) : probabilité de la zone grisée

F est **croissante** par rapport à x et par rapport à y

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x,y) \leqslant 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{F}(x,y) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \mathrm{F}(x,y) = 1$

Si F est deux fois dérivable par rapport aux deux variables, alors la loi de (X, Y) est dite **absolument continue**, de **densité** f vérifiant les égalités

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 \mathrm{F}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\mathrm{F}(x,y) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Fonctions de répartition marginales

$$\mathrm{F_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X}<x) = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{F}(x,y)$$

$$\mathrm{F_Y}(y) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}<y) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x,y)$$

Densités marginales

Si la loi est absolument continue,

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad f_{\mathrm{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Densités conditionnelles

Si la loi est absolument continue,

$$f_{\mathrm{X}}(x|\mathrm{Y}=y) = \frac{f(x,y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)} \qquad f_{\mathrm{Y}}(y|\mathrm{X}=x) = \frac{f(x,y)}{f_{\mathrm{X}}(x)}$$

à condition que $f_{\mathrm{X}}(x) \neq 0$ et $f_{\mathrm{Y}}(y) \neq 0$.

Indépendance

Les variables X et Y sont dites **indépendantes** si

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(y)$$

Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} f_{\mathrm{X}}(x|\mathrm{Y}=y) = f_{\mathrm{X}}(x) \\ f_{\mathrm{Y}}(y|\mathrm{X}=x) = f_{\mathrm{Y}}(y) \end{cases}$$

Espérance

Si la loi de (X, Y) est absolument continue et si la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue,

$$\mathrm{E}\left[h(\mathrm{X},\mathrm{Y})\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Covariance

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \mathrm{E}\left[(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))\right] \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \end{aligned}$$

Si X et Y sont **indépendantes**, $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 0$.
Attention, la réciproque est fausse (voir la loi normale vectorielle, ci-après).

Loi d'une somme

On suppose que la loi de (X, Y) est absolument continue. Alors Z = X + Y a pour densité

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y$$

Si X et Y sont indépendantes,

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(z-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}}(z-y) f_{\mathrm{Y}}(y)\mathrm{d}y$$

C'est le **produit de convolution** de f_{X} et f_{Y}.

Régression

Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \mathrm{Corr}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})}$$

avec $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sigma^2(\mathrm{X})$ et $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = \sigma^2(\mathrm{Y})$.

On a l'inégalité $|\rho| \leqslant 1$ et $\rho = 1$ si, et seulement si, il existe une relation linéaire entre X et Y. Dans ce cas,

$$\mathrm{Y} = \mathrm{E}(\mathrm{Y}) + \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\mathrm{V}(\mathrm{X})}\left[\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right]$$

Espérance conditionnelle

Fonction de régression (non linéaire) :

$$x \mapsto \mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x)$$

Le graphe de cette fonction donne la **courbe de régression** de Y en X.

Si la loi est absolument continue,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{\mathrm{Y}}(y|\mathrm{X}=x)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, \frac{f(x,y)}{f_{\mathrm{X}}(x)}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Espérance conditionnelle : $E(Y|X)$ est une v.a. fonction de la v.a. X et

$$E[E(Y|X)] = E(Y)$$

Variance conditionnelle

$$\begin{aligned} V(Y|X=x) &= E\left[(Y - E(Y|X=x))^2 | X = x\right] \\ &= E(Y^2|X=x) - E^2(Y|X=x) \end{aligned}$$

$V(Y|X)$ est une v.a. fonction de la v.a. X et

$$V(Y) = E\left[V(Y|X)\right] + V\left[E(Y|X)\right]$$

Vecteur aléatoire

Application $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

où toutes les composantes X_i sont des v.a. réelles.

Espérance d'un vecteur aléatoire

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

Matrice de variances-covariances

$$V(X) = E\left[(X - E(X))(X - E(X))^t\right] = (v_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$\begin{aligned} v_{ij} &= E\left[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right] = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ v_{ii} &= E\left[(X_i - E(X_i))(X_i - E(X_i))\right] = V(X_i) \end{aligned}$$

Changements d'échelle et d'origine
Multiplication par une matrice A de format (m, n)
et translation par un vecteur b de $\mathbb{R}^m$:

$$Y = A\,X + b = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}$$

Espérance : $E(Y) = E(A\,X + b) = A\,E(X) + b$

Matrice de variances-covariances :

$$V(Y) = V(A\,X + b) = V(A\,X) = A\,V(X)A^t$$

Vecteur aléatoire centré réduit :
On admet que la matrice $V(X)$ de variances-covariances est définie-positive, et donc son inverse également (voir cours de maths à venir). On la note $\Sigma = V(X)$.
On admet qu'il existe une matrice S telle que $S^2 = \Sigma^{-1}$.
Vecteur aléatoire centré réduit : $Y = S\left[X - E(X)\right]$

Loi normale vectorielle

Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ suit une **loi normale** si toute combinaison linéaire de ses composantes suit une loi normale dans $\mathbb{R}$.

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}_n \Longleftrightarrow \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n a_i X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}$$

Vecteur espérance $\mu = E(X)$
Matrice de variances-covariances $\Sigma = V(X)$
En particulier,

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}_n \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad X_i \rightsquigarrow \mathcal{N} \qquad (\mathbf{1})$$

Attention, la réciproque est fausse.

Variables indépendantes
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ avec

$$\mu = E(X) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = V(X) = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & {\sigma_n}^2 \end{pmatrix}$$

C'est **le seul cas** où la réciproque de ($\mathbf{1}$) est vraie.

Variables indépendantes centrées et réduites
(cas particulier important)
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}_n(0, I_n)$ (loi normale standard vectorielle).

Indépendance et covariance
Rappel : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, mais la réciproque est fausse dans le cas général.
Propriété : Si X_i et X_j sont les composantes d'un vecteur normal, elles sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle : $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

Autrement dit, dans le cas des composantes d'un vecteur normale, la réciproque est vraie (et très utile).

Changements d'échelle et d'origine
Soit X un vecteur de loi $\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$.
Multiplication par une matrice A de format (m, n)
et translation par un vecteur b de $\mathbb{R}^m$:

$$Y = A\,X + b = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}$$

Espérance : $E(Y) = E(A\,X + b) = A\,E(X) + b$

Matrice de variances-covariances :

$$V(Y) = V(A\,X + b) = V(A\,X) = A\,V(X)A^t$$

Y suit donc une loi $\mathcal{N}_m(A\mu + b, A\Sigma A^t)$.
Cas particulier important : si X suit une loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$, alors $Y = AX$ suit une loi $\mathcal{N}_m(0, AA^t)$.

Loi du khi-deux et de Student
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors ${X_1}^2 + \cdots + {X_n}^2 \rightsquigarrow \chi^2_n$.
Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, Y suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté et X et Y sont indépendantes, alors $Z = \sqrt{n}\,X/\sqrt{Y}$ suit une loi de Student à n degrés de liberté.

Liens avec les moments empiriques
(cas particuliers importants)
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $Y_n = \sum_{i=1}^n {X_i}^2 \rightsquigarrow \chi^2_n$.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $Z_n = \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \chi^2_n$.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$(n-1){S_n}^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2/\sigma^2 \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$$

(car les $X_i - \overline{X_n}$ sont liées par une relation : leur somme vaut 0 puisque $\overline{X_n} = \sum X_i/n$).
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $T_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - m}{S_n} \rightsquigarrow T(n-1)$.