Université Paris Dauphine
Probabilités multidimensionnelles et théorèmes limites

Année universitaire 2016-2017
TD de MR. BEY

Convergences

Inégalités

Inégalités de Markov

Si X est une variable aléatoire positive dont l'espérance existe, alors, pour tout $\lambda > 0$,

$$P(X \geqslant \lambda E(X)) \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}$$

Si X est une variable aléatoire telle que $E(|X|^k)$ existe, alors, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X|^k \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(|X|^k)}{\lambda} \quad \text{et} \quad P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire telle que $V(X)$ existe, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Cas particulier des variables centrées réduites : si X est une variable aléatoire telle que $V(X) = \sigma(X)^2$ existe, alors, pour tout $a > 1$,

$$P\left(\left|\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{1}{a^2}$$

Inégalité de Jensen

Si g est une fonction réelle convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si $E(X)$ et $E(g(X))$ existent, alors

$$g(E(X)) \leqslant E(g(X))$$

Convergence en probabilité

Définition

La suite de variables aléatoires (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Convergence en moyenne quadratique

La suite de variables aléatoires (X_n) converge en moyenne d'ordre $p > 0$ vers une variable aléatoire X si

$$\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$

Cas particulier très pratique : si $p = 2$, c'est équivalent de dire que la suite de variables aléatoires (X_n) converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X si

$$\begin{cases} E(X_n - X) \to 0 \\ V(X_n - X) \to 0 \end{cases}$$

Conditions suffisantes de conv. en probabilité

Si (X_n) converge en moyenne d'ordre p vers X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.

En particulier : si (X_n) converge en moyenne quadratique vers X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.

Théorème de Slutsky : si f est une application réelle continue et si (X_n) converge en probabilité vers X, alors $(f(X_n))$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Extension en dimension 2 : si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application uniformément continue et si (X_n) converge en probabilité vers X et (Y_n) converge en probabilité vers Y, alors $(f(X_n, Y_n))$ converge en probabilité vers $f(X, Y)$.

Loi faible des grands nombres

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout entier n, $E(X_n) = m$ et $V(X_n) = \sigma^2$, alors la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers m.

Rappel : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Preuve : à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Convergence en loi

Définition

Si pour tout entier n, F_n est la fonction de répartition de la variable X_n, alors la suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X (de fonction de répartition F) si la suite $(F_n(x))$ converge vers $F(x)$ en tout point x où F est continue.

Conditions suffisantes de convergence en loi

Si (X_n) converge en probabilité vers X, alors (X_n) converge en loi vers X.

Si (X_n) converge en loi vers X et (Y_n) converge en probabilité vers un réel a, alors $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers $X + a$, $(X_n Y_n)$ converge en loi vers aX et (X_n/Y_n) converge en loi vers X/a (si $a \neq 0$).

Théorème de Slutsky : si f est une application réelle continue et si (X_n) converge en loi vers X, alors $(f(X_n))$ converge en loi vers $f(X)$.

Cas discret : on suppose $X_n(\Omega) = X(\Omega) = \{a_i | i \in I\}$.
Si pour tout $i \in I$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = a_i) = P(X = a_i)$, alors la suite (X_n) converge en loi vers X.

Cas continu : on suppose que X_n a pour densité f_n et X a pour densité f.
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, alors la suite (X_n) converge en loi vers X.

Théorème central limite

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $E(X_n) = m$ et $V(X_n) = \sigma^2$ pour tout entier n, alors

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

En pratique, on approche la loi de $\overline{X}_n$ par une loi $\mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$. Approximation valable si $n \geqslant 30$.
Convergence d'une suite image : s'il existe $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et une suite (a_n) de réels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et pour tout entier n,

$$a_n(X_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma)$$

alors, si g est une application réelle dérivable,

$$a_n(g(X_n) - g(m)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma\,|g'(m)|)$$

Convergences usuelles

Convergence des moments empiriques
Rappel des notations :
Moyenne empirique

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Variance empirique

$$S_n'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

Moment empirique d'ordre k

$$m_{kn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^k$$

Moment d'ordre k

$$m_k = E(X^k)$$

Moment empirique centré d'ordre k

$$\mu_{kn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^k$$

Moment centré d'ordre k

$$m_k = E((X - E(X))^k)$$

Moyenne empirique
La suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité et en loi vers m.

Variance empirique
La suite $(S_n'^2)$ converge en probabilité vers σ^2 et vérifie

$$\sqrt{n}(S_n'^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\mu_4 - {\mu_2}^2}\right)$$

Moments empiriques :

$$m_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{proba}} m_k$$

$$\sqrt{n}\frac{m_{kn} - m_k}{\sqrt{m_{2k} - {m_k}^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Convergence de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$
Cas où $p \to 0$ avec $np \to \lambda$ fini quand $n \to \infty$
La loi $\mathcal{B}(n,p)$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approximation valable si $n \geqslant 30$, $p \geqslant 0,1$ et $np < 18$.

Cas où p reste fixe quand $n \to \infty$
La loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.
Approximation valable si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
Preuve : on écrit la variable comme somme de variables de Bernoulli X_i. D'après le théorème central limite,

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Correction de continuité
L'approximation d'une loi discrète X par une loi continue Y impose de remplacer X par $Y - 1/2$:

$$P(X \leqslant k) \approx P(Y - 1/2 \leqslant k)$$

Conv. de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, N_A)$
Si $N \to +\infty$ et $N_A/N = p$ reste fixe, on peut approcher la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, N_A)$ par une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Approximation valable pour $n/N \leqslant 0,1$.

Convergence de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Convergence de la loi Gamma $\gamma(p)$

$$\frac{X - p}{\sqrt{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Convergence de la loi du khi-deux χ^2_n

$$\frac{X - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\sqrt{2X} - \sqrt{2n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Convergence de la loi de Student $T(n)$

$$X \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$