Couple de variables aléatoires

TD Probabilités multidimensionnelles et théorèmes limites

Année universitaire 2016/2017

MR. BEY M-A

DAUPHINE UNIVERSITÉ PARIS | MIDO MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DÉCISION ET DES ORGANISATIONS

I - Loi jointe

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires. La **loi jointe** de (X,Y) est définie par sa **fonction de répartition** $F_{(X,Y)}$:

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ (x,y) &\rightarrow P(X \leq x, Y \leq y) \end{aligned}$$

Les **lois marginales** du couple (X,Y) sont la loi $\mathcal{L}(X)$ de X, et la loi $\mathcal{L}(Y)$ de Y.

Attention ! À partir des lois marginales, on ne peut pas connaître la loi du couple.

a - Cas des variables discrètes

Soient X et Y deux variables discrètes, X à valeurs dans $\mathbb{D}_X$ et Y à valeurs dans $\mathbb{D}_Y$. La loi du couple (X, Y) est définie par l'ensemble des probabilités :

$$P(X = x, Y = y) \quad \text{avec } x \in \mathbb{D}_X \text{ et } y \in \mathbb{D}_Y.$$

Dans le cas où les variables sont discrètes et prennent un petit nombre de valeurs, on écrit en général la loi du couple sous la forme d'un tableau :

$Y \backslash X$	$\ldots$	Somme des colonnes
$\vdots$	$P(X = x, Y = y)$	$P(Y = y)$
Somme des lignes	$P(X = x)$	

b- Cas des variables à densité

Définition : La loi du couple de v.a. (X, Y) est dite **à densité** s'il existe une fonction $f_{(X,Y)}$ telle que la fonction de répartition du couple s'écrit

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v) dudu,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
2. $\int \int_{R^2} f_{(X,Y)}(x, y) dxdy = 1$.

On retrouve facilement les lois marginales : les variables X et Y sont des variables continues de densité respectives
$f_X(x) = \int_R f_{(X,Y)}(x, y)dy$ et $f_Y(y) = \int_R f_{(X,Y)}(x, y)dx$.

II - Variables aléatoires indépendantes

Définition Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout intervalle A et B de $\mathbb{R}$ on a

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Proposition

Deux v.a. X et Y sont indépendantes

$\Leftrightarrow$ La fonction de répartition du couple vérifie $\forall(x,y)$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

$\Leftrightarrow$ Dans le cas discret $\forall(x,y)$,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y),$$

$\Leftrightarrow$ Dans le cas continu, la densité du couple vérifie $\forall(x,y)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

III - La covariance

La covariance permet d'estimer la dépendance entre deux variables aléatoires.

Définition La **covariance** de deux variables X et Y est

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

L'espérance $E(XY)$ est calculée à partir de la loi jointe de (X,Y) :

1. dans le cas discret,

$$E(XY) = \sum_{x \in \mathbb{D}_X, y \in \mathbb{D}_Y} xyP(X = x, Y = y)$$

2. dans le cas continu,

$$E(XY) = \int\int_{R^2} xyf_{(X,Y)}(x,y)dxdy.$$

Remarque Soient X et Y deux v.a. Alors
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y).$

Définition Le **coefficient de corrélation linéaire** est défini pour des variables non constantes par :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

On a toujours $\rho(X,Y) \in [-1,1]$.

Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1 plus la dépendance entre les variables X et Y est forte.

Remarque Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$ et donc $\rho(X,Y) = 0$. On a par conséquent,

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Attention La réciproque est fausse !