Rappels

Exercice 1 Huit tours sont disposées au hasard sur un jeu d'échec. Calculer la probabilité qu'aucune tour ne puisse ne prendre un autre, donc qu'aucune ligne ni colonne ne contienne plus qu'une tour.

Exercice 2 On distribue les cartes d'un paquet en comptant 52. Quelle est la probabilité que la 14ème carte distribuée soit un as ? Quelle est la probabilité que le premier as survienne à la 14ème carte ?

Exercice 3 On lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu. On note E l'événement "le dé rouge tombe sur 4", F l'événement "la somme des résultats est 6", G l'événement "la somme des résultats est 7" et H l'événement "le dé bleu tombe sur 4". Les événements E et F sont ils indépendants ? Qu'en est-il de E et G, de E et H, de H et G ? Les événements E, G et H sont ils mutuellement indépendants ?

Exercice 4 Une compagnie financière propose entre autres produits trois fonds de placement A, B et C. Le fonds A est souscrit par 50% de ses clients, le fonds B par 40% et le fonds C par 60%. Il y a 20% du total de ses clients qui souscrivent à la fois aux fonds A et B. Parmi les souscripteurs du fonds C, 60% souscrivent aussi au fonds A et 50% souscrivent aussi au fonds B. Finalement 12% des clients de la compagnie souscrivent aux trois fonds. On tire au hasard un client de cette compagnie et on note $P(A)$ (resp. $P(B), P(C)$) la probabilité qu'il s'agisse d'un souscripteur du fonds A (resp. B, C).

1. Comparer $P(A \cap B \cap C)$ à $P(A)P(B)P(C)$. Les événements A, B et C sont ils mutuellement indépendants ?
2. Quelle est la probabilité que le client tiré au hasard souscrive à au moins l'un des fonds A, B ou C ?
3. Quelle est la probabilité que le client tiré au hasard souscrive à au moins deux des fonds A, B ou C ?
4. Quelle est la probabilité qu'un souscripteur du fonds C souscrive aussi à l'un des fonds A ou B ?
5. Quelle est la probabilité qu'un souscripteur du fonds A soit aussi un souscripteur du fonds C ?

Exercice 5 Un étudiant répond à une question où il y a à choisir entre m réponses possibles sachant qu'une seule est la bonne. Soit p la probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la bonne réponse sachant qu'il a répondu correctement ?

Exercice 6 Un Hôpital utilise un test sanguin pour détecter la présence du virus de la grippe aviaire. La probabilité d'obtenir un résultat positif (présence du virus) pour une personne effectivement infectée est de 99 % tandis que cette probabilité est de 1% pour une personne saine. À l'heure actuelle la proportion de population totale infectée est de 0,0001 %.

1. Quel est la probabilité qu'une personne testée soit porteuse du virus sachant que le test donne un résultat positif ? Donner une valeur approximative de cette probabilité.

Ce test étant très coûteux et aucun cas de transmission entre humains n'ayant été signalé jusqu'à présent, l'hôpital prend la décision de faire passer un entretien à ses patients et de ne faire subir le test que à ceux ayant été en contact avec des volailles porteuses du virus. Sur cette population la proportion des personnes infectées est de 1 %.

2. Quelle est a probabilité qu'une personne issue de cette population soit porteuse du virus sachant que le test donne un résultat positif ? Donner une valeur approximative de cette probabilité.

Cette procédure ne permettant pas de conclure à partir du résultat d'un seul test, l'hôpital décide finalement que chaque personne ayant été en contact avec des volailles porteuses du virus devra passer 5 tests. Les résultas de ces tests sont supposés indépendants les uns des autres, que les personnes testées soient malades ou pas.

3. Quelle est a probabilité qu'une personne issue de cette population soit porteuse du virus sachant que les 5 tests ont donné un résultat positif ? Donner une valeur approximative de cette probabilité. *Remarque :* $0.99^5 \approx 0.95$.
4. Quelle est a probabilité qu'une personne issue de cette population soit porteuse du virus sachant que les 5 tests ont donné un résultat négatif ? Donner une valeur approximative de cette probabilité.

Exercice 7 À l'instant 0, une urne contient une boule rouge et une boule verte et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur (on dispose en réserve d'une infinité de boules rouges et vertes). On note S_n le nombre de boules rouges au temps $n \geq 0$. Prouver que pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$ on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 8 Comment placer 20 boules dont 10 sont noires et 10 sont blanches dans deux urnes de manière à maximiser la probabilité de tirer une boule blanche dans l'expérience suivante : « on choisit d'abord une urne au hasard, chaque urne ayant même probabilité d'être tirée puis on tire une boule dans l'urne choisie » ?

Exercice 9 Un joueur peut lancer deux fois de suite un dé à six faces équilibré pour obtenir le meilleur score possible : si le score obtenu au premier lancer le satisfait il peut en rester là. Si ce score ne le satisfait pas il peut lancer une deuxième fois le dé mais le score obtenu au premier lancer est alors perdu. Le joueur décide de la stratégie suivante : il s'arrêtera si le résultat du premier lancer est supérieur ou égal à un seuil k et il lancera une deuxième fois sinon. Soit X^k le score obtenu en suivant cette stratégie. Donner la loi de X^k en fonction de k. Calculer l'espérance de X^k.

Exercice 10 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Classer dans l'ordre croissant les quantités $\mathbb{P}(X \in [-4, -3]), \mathbb{P}(X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ et $\mathbb{P}(X \in [1, 2])$.

Exercice 11 Un point est choisi au hasard sur un segment de longueur L. Interpréter cet énoncé et calculer la probabilité que le rapport entre le plus petit et le plus grand segment soir inférieur à $1/4$.

Exercice 12 Un bus circule entre deux villes A et B distantes de 100 kilomètres. On suppose que quand ce bus tombe en panne cela arrive à une distance de A mesurée en kilomètres uniformément répartie sur $[0, 100]$. Trois ateliers de dépannage sont situés en A, B et à mi-chemin entre A et B. Serait-il plus judicieux de placer ces ateliers aux points kilométriques 25, 50 et 75 ?

Exercice 13 Soit X une variables aléatoire à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E.

1. On suppose que E est un ensemble fini : $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ et pour tout entier k, $1 \leq k \leq N$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = e_k) > 0$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire à valeurs dans E définie par $Y = e_k$ dès que $U \in]\sum_{l=0}^{k-1} p_l, \sum_{l=0}^{k} p_l]$ avec la convention $p_0 = 0$. Montrer que X et Y ont même loi.
2. Déduire de la question précédente le moyen de simuler un tirage de X en partant du tirage d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ quand E est un ensemble dénombrable.

Exercice 14 Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On note F sa fonction de répartition.

1. A-t-on nécessairement $F(\mathbb{R}) = [0, 1]$? La fonction $F : \mathbb{R} \to F(\mathbb{R})$ est-elle nécessairement bijective ?
2. On introduit la fonction G définie sur $]0, 1[$ par

$$G(y) = \inf\{a \in \mathbb{R}, F(a) \geq y\}.$$

Montrer que X a même loi que $G(U)$ où U est de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Cette façon de tirer au sort suivant la loi de X est appelée méthode d'inversion

Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue : cas particulier des ensembles produit

Exercice 15 On note $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R} \otimes \mathcal{R})$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lambda_2(B(0,\varepsilon)) > 0$ où $B(0,\varepsilon)$ est la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ centrée en l'origine et de rayon ε quand $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne habituelle.
2. Montrer que $\lambda_2(H_1) = \lambda_2(D) = 0$ où $H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 1\}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = y\}$.

Exercice 16 Est-il vrai que si f est positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ pour la mesure de Lebesgue on a $\int_{\mathbb{R}} f(x,x)dx < \infty$?

Exercice 17 1. Montrer que pour tout réel $a > 0$ l'intégrale $\int_0^a \frac{\sin(x)}{x} dx$ est bien définie.

2. Utiliser le théorème de Fubini et le fait que pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt$$

pour montrer que $\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 18 Soit f une fonction positive mesurable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \left(\int_{-\infty}^{x_1} f(x_2) dx_2 \right) dx_1 = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^2.$$

Exercice 19 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx.$$

Exercice 20 Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t) dt$.
2. Plus généralement, montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, dérivable et vérifie $f(0) = 0$ alors $\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^\infty f'(t) \mathbb{P}(X \geq t) dt$.

Exercice 21 Soit g une fonction définie sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$U = \mathbb{1}_{Y \leq g(X)}, \quad V = g(X), \quad W = \frac{1}{2}(g(X) + g(1-X)).$$

Montrer que $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[W]$ tandis que $\mathbb{V}[U] \geq \mathbb{V}[V] \geq \mathbb{V}[W]$.

Vecteurs aléatoires

Exercice 22 Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Soit $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 23 On dispose de trois dés équilibrés de couleurs différentes. Le dé Bleu porte le nombre 2 sur deux de ses faces, le nombre 6 sur deux autres faces et finalement le nombre 7 sur les deux faces restantes. Le dé Vert porte le nombre 3 sur deux de ses faces, le nombre 4 sur deux autres faces et finalement le nombre 8 sur les deux faces restantes. Le dé Noir porte le nombre 1 sur deux de ses faces, le nombre 5 sur deux autres faces et finalement le nombre 9 sur les deux faces restantes. On note R_B le résultat du dé bleu, R_V le résultat du dé vert et R_N le résultat du dé noir. On propose le jeu suivant : le joueur 1 choisit l'un des trois dés, le lance et note le résultat obtenu. Le joueur 2 choisit un dé parmi les deux dés que le joueur 1 n'a pas pris, le lance et note le résultat obtenu. Le vainqueur est celui qui obtient le résultat le plus élevé. On remarquera que les joueurs 1 et 2 n'ont pas des rôles symétriques.

1. Vous semble-t-il que l'un des deux joueurs a une position avantageuse dans ce jeu ? Si oui, lequel ?
2. Calculer $\mathbb{P}(R_B < R_V), \mathbb{P}(R_V < R_N)$ et $\mathbb{P}(R_N < R_B)$.
3. Est-ce que les résultats de la question précédentes vous amènent à réviser votre réponse à la première question ?

Exercice 24 On définit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y. On suppose que X est de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ et que Y est de loi de Bernoulli de paramètre $q \in [0, 1]$. On suppose de plus que $p < q$. On remarquera que cela impose les lois marginales de (X, Y) mais pas la loi jointe du couple.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1 - \mathbb{P}((X, Y) = (1, 0))$.
2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$ et Z la variable aléatoire définie par
$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } U < x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Quelle est la loi de Z ?
3. Montrer que l'on peut se donner une loi jointe pour le couple (X, Y) compatible avec l'énoncé et telle que $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$ (on pourra s'inspirer de la question précédente).
4. Montrer que dans tous les cas possibles de lois jointes de (X, Y) compatibles avec l'énoncé on a $\mathbb{P}(X \leq Y) \geq 1 - \min(p, 1 - q)$.
5. Montrer que l'on peut se donner une loi jointe de (X, Y) compatible avec l'énoncé et telle que $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1 - \min(p, 1 - q)$.

Exercice 25 Un bureau d'études veut mener une enquête sur la consommation de tabac dans certains lieux publics. Dans un premier temps on répartit la population en fumeurs et non-fumeurs, en supposant que 60 % des personnes ne fument jamais. On suppose par ailleurs que le nombre de personnes qui entrent dans l'un des lieux publics considérés pendant une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On suppose aussi que ces personnes sont fumeurs ou non-fumeurs indépendamment les unes des autres et indépendamment du nombre de personnes entrées.

1. Quelle est la loi jointe du nombre de fumeurs et non-fumeurs qui entrent dans l'un des lieux publics considérés pendant une heure ?
2. Quelle est la loi marginale du nombre de fumeurs ?
3. Le nombre de fumeurs est-il indépendant du nombre de non-fumeurs ?
4. Répondre aux mêmes questions dans le cas où le nombre de personnes fréquentant ces lieux n'est plus une variable aléatoire mais un entier strictement positif fixé à l'avance.

Exercice 26 Soit X une variable aléatoire réelle de loi symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont même loi, telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < \infty$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X de loi donnée par $\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = -1) = p, p \in [0, 1]$. On pose $Z = XY$.

1. Quelle est la loi de Z ?
2. Donner une condition nécessaire sur la valeur de p pour que X et Z soient indépendantes. Cette condition est-elle suffisante en général ?

Exercice 27 Soient X, Y et U trois variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que la loi de U est donnée par $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(U = -1) = \frac{1}{2}$ et on pose $S = UX$ et $T = UY$.

1. Est-ce que S et T sont nécessairement indépendantes ? Si oui, prouvez-le. Si non, donnez un contre-exemple.
2. Est-ce que S^2 et T^2 sont nécessairement indépendantes ? Si oui, prouvez-le. Si non, donnez un contre-exemple.

Exercice 28 Soit (X, Y) un couple de densité jointe
$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(-(x + y)) & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X/Y.

Exercice 29 Soit
$$f(x,y) = \begin{cases} k(y^2 - x^2 + 1) & \text{si } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
où k est un paramètre réel.

1. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle f est une densité de probabilité ?
2. Même question si on remplace $[0,1] \times [0,1]$ par $[0,2] \times [0,2]$.

Exercice 30 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de loi de densité
$$f(x,y) = \exp(-y) 1_{y \geq x > 0}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer les lois marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1 | Y > 2)$.

Exercice 31 Soit $V = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires admettant pour densité
$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer k ainsi que les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer la covariance du couple (X,Y). Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 32 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la loi de $T = \min(X,Y)$ et celle de $Z = \max(X,Y)$.
2. les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la covariance du couple (Z,T).
4. Déterminer la loi du couple (Z,T).

Exercice 33 Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi du couple $([X], X - [X])$, où $[x]$ est la partie entière de x ?
2. Les variables $[X]$ et $X - [X]$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 34 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$ respectivement. On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$ est donnée par
$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{x>0}$$
et que la densité de la loi $\mathcal{B}(a,b)$ $(a,b > 0)$ est donnée par
$$g(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{0<x<1}.$$

1. Calculer la loi du couple (S,T) où $S = X + Y$ et $T = X/(X+Y)$.
2. Montrer que S et T sont indépendantes et calculer leurs lois respectives.
3. Déterminer la loi de X/Y et calculer son espérance si elle existe. Cette variable aléatoire est-elle indépendante de S ?

Exercice 35 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendante de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?
2. Quelle est la loi du couple (S,D) ?

Exercice 36 Soit (X,Y) un couple aléatoire de loi uniforme sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x < 1\}$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V) où $U = X - Y$ et $V = \frac{Y}{X}$.
2. Quelles sont les lois de U et de V ?

3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 37 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, X étant de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ et Y de loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$. On suppose que $\alpha \neq \beta$. On rappelle qu'une variable aléatoire réelle est de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ si elle admet $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ comme densité.

1. Quelle est la loi du couple $(X+Y, Y)$?
2. Quelle est la loi de $X+Y$?
3. Les variables aléatoires $X+Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 38 Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité

$$f_\lambda(x,y) = c_\lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_D(x,y)$$

où λ est un paramètre réel strictement positif fixé, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < y\}$ et c_λ est une constante qui fait de f_λ une densité.

1. Que vaut c_λ ?
2. Quelle est la loi du couple $(\frac{X}{Y}, Y)$?
3. Donner la loi de $\frac{X}{Y}$ et celle de Y.
4. Les variables aléatoires $\frac{X}{Y}$ et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 39 Soit (X,Y) un vecteur aléatoire uniformément distribué sur le disque de $\mathbb{R}^2$ centré en l'origine et de rayon 1.

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer leurs lois.
2. Quelle est la loi du coupe (R, Θ), coordonnées polaires de (X,Y) dans le plan ?
3. Montrer que R et Θ sont indépendantes.

Exercice 40 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes qui admettent toutes deux

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{]1,\infty[}(x)$$

pour densité. On pose $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}$.

1. Quelle est la loi du couple (U,V) ?
2. Calculer les lois de U et V. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[\frac{1}{\sqrt{UV}}]$.

Exercice 41 *Forme polaire de la méthode de Box et Müller.* Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que les variables aléatoires définies par

$$X = \sqrt{-2\log U_1} \cos(2\pi U_2), \qquad Y = \sqrt{-2\log U_1} \sin(2\pi U_2)$$

sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 42 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux densités de probabilité pour lesquelles il existe un réel c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leq cg(x)$. On suppose qu'il est facile d'obtenir des tirages suivant la densité g et on se propose d'étudier une façon d'en déduire des tirages suivant la densité f connue sous le nom de *méthode du rejet.* Pour cela on introduit une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même densité g et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose que les suites $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Soit $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ la fonction définie par

$$h(x) = \frac{f(x)}{cg(x)} \mathbb{1}_{g(x)>0}.$$

Finalement, soient X et N les variables aléatoires définies par $N = \inf\{n \geq 1, U_n \leq h(Y_n)\}$ et $X = Y_N$.

1. Montrer que $c \geq 1$ nécessairement.
2. Quelle est la loi de N ?

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $k \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}(X \leq x, N = k) = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{k-1} \frac{F(x)}{c}$$

où F est la fonction de répartition associée à la densité f.

4. En déduire que X ainsi définie admet f pour densité.

Exercice 43 *Forme cartésienne de la méthode de Box et Müller.* Soient $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit

$$N = \inf\{n \geq 1, 0 < U_n^2 + V_n^2 < 1\}$$

et

$$X = U_N \sqrt{\frac{-2\log(U_N^2 + V_N^2)}{U_N^2 + V_N^2}}, \qquad Y = V_N \sqrt{\frac{-2\log(U_N^2 + V_N^2)}{U_N^2 + V_N^2}}.$$

1. Quelle est la loi de N ?
2. Montrer que X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 44 Soient X, Y et Z trois vecteurs réels de dimensions respectives p, q et r. On suppose que le vecteur (X, Y) est indépendant de Z et que X et Y sont indépendants. Montrer que X est indépendant du vecteur (Y, Z).

Exercice 45 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est indépendante de X_{n+1}.

Exercice 46 Soient $X_1, \ldots, X_m$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant une densité. Calculer $\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_{m-1} < X_m)$.

Exercice 47 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires positives indépendantes de même loi telle que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$. Pour tout $k = 1, \ldots, n$ calculer

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right].$$

Théorèmes limite

Exercice 48 Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire X_n est de loi géométrique de paramètre $p/n, p \in]0, 1[$. La suite $Y_n = X_n/n$ converge-t-elle en loi ?

Exercice 49 On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité f. On suppose que $\mathbb{P}(X_1 > 0) = 1$ et que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lambda > 0$. On construit une suite $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ en prenant

$$Z_n = n \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 50 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles tendant en loi vers une variable aléatoire réelle X. On suppose que la loi de X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont même loi. Prouver que $(-X_n)_{n\geq 1}$ tend en loi vers X.

Exercice 51 Donner un exemple où deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont telles que $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ et $Y_n \overset{\mathcal{L}}{\to} Y$ mais $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en loi vers $X + Y$.

Exercice 52 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.

1. Quelle est la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$?
2. Que vaut $\mathbb{P}(S_n \leq n)$?

3. En déduire la limite de $\exp(-n)\sum_{k=0}^{n} n^k/k!$ quand n tend ver l'infini.

Exercice 53 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < x) = \Phi(x)$$

où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Exercice 54 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi de variance σ^2 finie. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est de même loi que X (et donc de même loi que Y).

1. Montrer que X est d'espérance nulle.
2. Montrer que si X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que X alors $\frac{1}{2}(X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2)$ est de même loi que X.
3. Déduire de la question précédente que X est nécessairement de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Exercice 55 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles pour laquelle il existe un réel μ et une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ tels que $\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Montrer qu'alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$.

Exercice 56 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'il existe deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur ce même espace de probabilité telles que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. A-t-on $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$? Si oui, le prouver. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 57 Soit $X_1, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire X_n est de loi $\mathcal{N}(0, 1/n)$.

1. Est-ce que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité ? Si oui donner sa limite.
2. Est-ce que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi ? Si oui donner sa limite.

Exercice 58 Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?
2. Montrer que quelle que soit la valeur de θ on a
$$\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} \theta \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[(\overline{X}_n - \theta)^2] \to 0.$$
3. Construire un intervalle de la forme $[a_1(X_1), b_1(X_1)]$ tel que $\mathbb{P}(\theta \in [a_1(X_1), b_1(X_1)]) = 95\%$.
4. Construire un intervalle de la forme $[a_n(X_1, \dots, X_n), b_n(X_1, \dots, X_n)]$ tel que
$$\mathbb{P}(\theta \in [a_n(X_1, \dots, X_n), b_n(X_1, \dots, X_n)]) = 95\%.$$

Exercice 59 Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in]0,1[$ inconnu.

1. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que quelle que soit la valeur de θ on a
$$\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} \theta \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[(\overline{X}_n - \theta)^2] \to 0.$$
2. Construire pour tout $n \geq 1$ un intervalle de la forme $[a_n(X_1, \dots, X_n), b_n(X_1, \dots, X_n)]$ tel que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\theta \in [a_n(X_1, \dots, X_n), b_n(X_1, \dots, X_n)]) = 95\%.$$

Exercice 60 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}$$

1. Montrer que chaque f_n est la densité d'une variable aléatoire X_n. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{V}[X_n]$.

2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 quand $n \to \infty$.

Exercice 61 On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui ont pour loi la probabilité uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$, avec $\theta > 0$. Montrer que la suite $(M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)\,)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers θ.

Exercice 62 Soit f une application réelle continue définie sur $[0, 1]$. Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme P_ϵ tel que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon$.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0, 1]$. Montrer que pour tout $\eta > 0$ on a
$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - x| > \eta) \leq \frac{x(1-x)}{n\eta^2}$$
où $\bar{X}_n$ est la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$.
2. En déduire le résultat annoncé. *Indication : utiliser la variable aléatoire* $f(\bar{X}_n)$

Exercice 63 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi qui n'est pas la loi d'une variable aléatoire constante. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas converger en probabilité.

Exercice 64 Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et variance $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$ finies. On considère la moyenne empirique
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
et la variance empirique
$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}[S_n^2] = \sigma^2$.
2. Montrer que $S_n^2 \overset{p.s.}{\to} \sigma^2$.

Exercice 65 Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. On commence par tirer au hasard la valeur de X puis on construit une suite $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ en prenant
$$X_n = \begin{cases} X & \text{avec probabilité } 1 - 1/n \\ \exp n & \text{avec probabilité } 1/n \end{cases}$$
indépendamment de la valeur de X.

1. Est-ce que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X en probabilité ?
2. Est-ce que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X en loi ?
3. Est-ce que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X en moyenne quadratique ?

Exercice 66 Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$
$$\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et } \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}.$$
Est-ce que cette suite converge en probabilité ? Est-ce que cette suite converge en moyenne quadratique ?

Exercice 67 Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires et b un nombre réel. Montrer que $X_n \overset{L^2}{\to} b$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = b$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}[X_n] = 0$.

Exercice 68 Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires telle que $c = \sup_{i\geq 1} \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_iX_j] = 0$ dès que $i \neq j$. Montrer que la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$ tend vers 0 dans L^2 et en probabilité.

Exercice 69 On participe au jeu suivant : on dispose au départ de 1 euro. À chaque étape du jeu on peut doubler ou diviser par deux sa cagnotte avec même probabilité $(1 - \varepsilon)/2$ ou encore tout perdre avec probabilité ε où $\varepsilon \in]0, 1[$. On note G_n l'état de la cagnotte après n étapes.

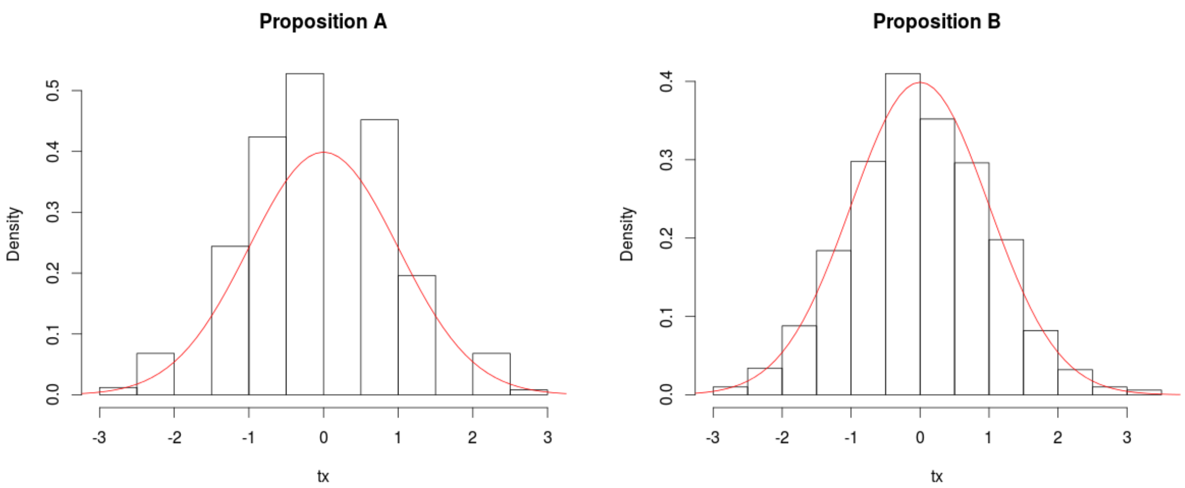
1. Calculer $\mathbb{P}(G_n = 0)$ ainsi que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_n = 0)$.
2. Donner la loi de G_n.
3. Calculer $\mathbb{E}[G_n]$ ainsi que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[G_n]$.

Exercice 70 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire X_n est de loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$. Montrer que la suite $(S_n = \sum_{k=1}^n X_k)_{n\geq 1}$ est presque sûrement convergente si et seulement si la suite $(s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 71 On considère le code en langage R suivant

```
n <- 500
m <- 8
x <- matrix(sample(c(0,1),n*m,replace=TRUE),nrow=n)
mx <- 1:n
for(i in 1:n){
  mx[i] <- (1/m)*sum(x[i,]-0.5)
}
tx <- sqrt(4*m)*(mx)
hx <- hist(tx,freq=FALSE,plot=TRUE)
u <- seq(-4,4,0.1)
v <- dnorm(u)
lines(u,v,type='l',col='red')
```

Lequel des deux histogrammes représentés ci-dessous est typique de ce que l'on observe après l'exécution de ce code ?



Exercice 72 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout entier $n \geq 1$ la variable aléatoire X_n est de loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0,1]$, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p_n.$$

On suppose qu'il existe une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

1. Montrer que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est nécessairement convergente.
2. Quelle est la loi de X ?
3. Montrer que pour tout réel $r > 0$ la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X en moyenne d'ordre r.

Variables gaussiennes, vecteurs gaussiens

Exercice 73 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.

1. Pour tout $\lambda > 0$ calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$.

2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{P}(X - m \geq x) \leq e^{-\lambda(x+m)}\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$.
3. Montrer, en choisissant le paramètre λ ci-dessus de façon judicieuse, que pour tout $x > 0$ on a

$$\mathbb{P}(X - m \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Exercice 74 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que pour tout entier k on a

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k} \quad \text{tandis que} \quad \mathbb{E}[(X-\mu)^{2k+1}] = 0.$$

Exercice 75 Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. Calculer $\mathbb{E}[|X|]$.

Exercice 76 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$.
2. Montrer que les trois variables aléatoires $X - Y, Y - Z$ et $Z - X$ sont chacune indépendantes de U.
3. Soit $V = Y - X$ et $W = X + \alpha Y$. Déterminer (si il existe) α tel que V et W soient indépendantes.
4. Quelle est la loi du vecteur $(X + Y + Z, 2X - Y - Z, Y - Z)$?
5. Les variables aléatoires $X + Y + Z, 2X - Y - Z$ et $Y - Z$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 77 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X étant de loi gaussienne centrée réduite et Y vérifiant $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$. On pose $Z = XY$.

1. Montrer que Z est de loi gaussienne centrée réduite.
2. Les variables aléatoires X et Z sont-elles corrélées ?
3. Est-ce que le couple (X, Z) est un couple gaussien ?

Exercice 78 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $a > 0$ on pose

$$Y^{(a)} = X\mathbb{1}_{|X|<a} - X\mathbb{1}_{|X|\geq a}.$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$ la variable aléatoire $Y^{(a)}$ est gaussienne mais que pour tout $a > 0$ le couple $(X, Y^{(a)})$ n'est pas gaussien.
2. Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{4}$.
3. Calculer $Cov(X, Y^{(b)})$. Les variables X et $Y^{(b)}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 79 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Montrer que $(X_1 + X_2)^2$ et $(X_1 - X_2)^2$ sont indépendantes si et seulement si $\sigma_1 = \sigma_2$.

Exercice 80 Soit $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de dispersion la matrice identité I_n et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de dispersion D. On suppose que D est inversible.

1. Montrer que D est symétrique et définie positive.
2. La matrice D est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que toutes les valeurs propres de D sont strictement positives.
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une matrice C telle que $D = CC^*$.
5. Quelle est la densité jointe de Y ?
6. Quelle est la loi du vecteur défini par $V = CY$?
7. À l'aide d'un changement de variables, déduire des questions précédentes la densité jointe du vecteur X.

Exercice 81 Soit X un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de matrice de dispersion K. Soient T_1, T_2 les matrices représentant deux applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$ respectivement. Montrer que les vecteurs $Y_1 = T_1X$ et $Y_2 = T_2X$ sont indépendants si et seulement si $T_1KT_2^* = 0$.

Exercice 82 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$?
2. Montrer que pour tout réel a on a $\mathbb{P}(\max_{i=1,..,n} X_i \leq a) > 0$.
3. Montrer que $\bar{X}_n$ et $\max_{i=1,..,n} X_i$ ne sont pas indépendantes.
4. Montrer que $\bar{X}_n$ et $\min_{i=1,..,n} X_i$ ne sont pas indépendantes.
5. Montrer que $\bar{X}_n$ et $(X_1 - \bar{X}_n, \ldots, X_n - \bar{X}_n)$ sont indépendantes.
6. En déduire que $\bar{X}_n$ et $(\max_{i=1,..,n} X_i - \min_{i=1,..,n} X_i)$ le sont aussi.

Exercice 83 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $U = X/Y$ est de densité

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}.$$

Exercice 84

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $U = X^2$ suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la densité de $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$? La loi de T est appelée loi $\chi^2(n)$.
3. Soient V et W deux variables aléatoires indépendantes de loi $\chi^2(n)$ et $\chi^2(m)$ respectivement. Quelle est la loi de $V + W$?

Exercice 85 Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à composantes indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma \neq 0$. On définit $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ et $Z = \sum_{i=1}^n (X_i - Y/n)^2$.

1. Soit A une matrice orthogonale d'ordre n, de terme général $a_{i,j}$ telle que pour tout $1 \leq j \leq n$ on a $a_{1,j} = 1/\sqrt{n}$. Montrer que pour tout entier $n \geq l \geq 2$ on a $\sum_{j=1}^n a_{lj} = 0$. En déduire la loi de $W = AX$.
2. Montrer que $W_1 = \sqrt{n}Y$.
3. Montrer que $\sum_{i=1}^n W_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$.
4. Montrer que $Z = \sum_{i=2}^n W_i^2$.
5. Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.
6. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires Y et Z/σ^2.

Exercice 86 Soient $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X_1, \ldots, X_n$ les variables aléatoires définies par

$$X_i = aX_{i-1} + \epsilon_i \quad i = 1, \ldots, n$$

en posant $X_0 = 0$. Quelle est la loi du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$?

Exercice 87 Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien de moyenne nulle et de matrice de dispersion

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Existe-t-il trois réels non tous nuls a, b, c et d tels que $aX_1 + bX_2 + cX_3 = d$ *p.s.* ? Si oui, en donner un exemple.
2. Existe-t-il une matrice réelle A telle que $Y = AX$ soit un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de dispersion I_3 ? *Justifier votre réponse.*

Exercice 88 Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien de moyenne nulle et de matrice de dispersion

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Est-ce que Γ est inversible ? Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles affinement indépendantes ?
3. On demande à un étudiant d'effectuer le tirage de 50 couples aléatoires gaussiens indépendants et de même loi que X. Il devra ranger les résultats obtenus dans un tableau appelé `r` à 50 colonnes et deux lignes, chaque colonne de ce vecteur étant donc de même loi que X. Il propose le code en langage R suivant
```
e <- rnorm(50)
v <- 3*e
r <- t(cbind(v,e))
```
Justifier cette proposition.

Soient V_1 et V_2 deux variables aléatoires réelles de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose que X, V_1 et V_2 sont indépendantes.

4. Soit ε un réel strictement positif. On pose $Z = X + \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$. Le vecteur Z est-il un vecteur gaussien ?
5. On demande à un étudiant d'effectuer le tirage de 50 couples aléatoires gaussiens indépendants, de moyenne nulle et de matrice de dispersion
$$\Delta = \begin{pmatrix} 9+\varepsilon & 3 \\ 3 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$
en prenant $\varepsilon = 0.001$. Il devra ranger les résultats obtenus dans un tableau appelé `s` à 50 colonnes et 2 ligne de sorte que chaque colonne soit le résultat du tirage d'un couple. Il propose le code en langage R suivant
```
e <- rnorm(50)
v <- 3*e
r <- t(cbind(v,e))
a <- matrix(rnorm(100),nrow=2)
s <- r + sqrt(0.001)*a
```
Justifier cette proposition.
6. L'étudiant trace le nuage de points correspondant aux résultats de la simulation ci-dessus à l'aide de la commande
```
plot(s[1,],s[2,])
```
Quel est, parmi les trois graphes suivant, celui qui est typique du résultat obtenu. Pourquoi ?