Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis **2008-2009**

Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 2

Exercice 1

Résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a- Par la méthode de Gauss sans stratégie du pivot .
b- Par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel.
c- En utilisant la factorisation $A = LU$.

Exercice 2

Résoudre par la méthode de Cholesky le système $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 28 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive, et $b \in \mathbb{R}^n$.
1– Montrer que la matrice A admet la factorisation $A = LDL^T$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et D est diagonale à éléments diagonaux positifs.
2– Ecrire un algorithme de résolution du système : $LDL^T\,x = b$.

Exercice 4

Montrer que la factorisation $A = LU$ conserve la structure "bande", c'est à dire : si $A = LU$ avec $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| \geq p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ donné), alors $L_{ij} = U_{ji} = 0$ pour $(i - j) \geq p$.

Exercice 5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Soit $A = BB^T$ la factorisation de Cholesky de A.
1– Montrer que :

$$\mathrm{Cond}_2(A) = [\mathrm{Cond}_2(B)]^2 \geq \frac{\max\limits_k |b_{kk}|^2}{\min\limits_k |b_{kk}|^2}$$

2– Montrer que si A est de plus tridiagonale ($a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$), alors B est bidiagonale inférieure ($b_{ij} = 0$ si $i - j > 1$).

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On suppose que A est inversible et admet la factorisation $A = LU$, où $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure à éléments diagonaux égaux à 1, et où $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure.

Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note A_k la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A en ne gardant que les k premières lignes et les k premières colonnes, soit $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$.
1– Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la matrice A_k admet la factorisation $A_k = L_k U_k$, où $L_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure à éléments diagonaux égaux à 1, et où $U_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure.

2– On pose, pour $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$:

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & v_k \\ \hline w_k^t & a_{kk} \end{array}\right), \quad \text{où } v_k \in \mathbb{R}^{k-1} \text{ et } w_k \in \mathbb{R}^{k-1}.$$

En supposant connue la factorisation $A_{k-1} = L_{k-1}U_{k-1}$ et en écrivant :

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} L_{k-1} & 0 \\ \hline m_k^t & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{k-1} & q_k \\ \hline 0 & u_{kk} \end{array}\right), \quad \text{où } m_k \in \mathbb{R}^{k-1}, q_k \in \mathbb{R}^{k-1} \text{ et } u_{kk} \in \mathbb{R},$$

montrer comment on peut déterminer la factorisation $A_k = L_kU_k$.
3– Déduire de ce qui précède une méthode pour la détermination de la factorisation $A = LU$ de la matrice A.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, avec $1 \leq m < n$. On considère la matrice carrée $M \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{R})$ définies par blocs de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & O \end{pmatrix}$$

1– Examiner si la matrice M est symétrique et si elle est définie positive.

2– Montrer que M est inversible, si et seulement si on a

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^m \qquad (B^T y = 0 \Rightarrow y = 0)$$

3– On suppose que M est inversible et on cherche à la décomposer, en utilisant la même écriture par blocs donnée ci-dessus, sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} L_1 & O \\ B_1 & -L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^T & B_1^T \\ O & L_2^T \end{pmatrix}$$

où L_1 et L_2 sont deux matrices triangulaires inférieures.
Montrer que cette décomposition est possible et donner une méthode permettant de déterminer L_1, L_2 et B_1.

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles admettant chacune une factorisation "LU" :

$$A = L_AU_A, \quad \begin{array}{ll} L_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

$$B = L_BU_B, \quad \begin{array}{ll} L_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ définie (par blocs) comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M est inversible.

2. Montrer que M admet une factorisation LU unique.

3. Proposer alors une méthode pour résoudre le système linéaire $Mx = b$, où $b \in \mathbb{R}^{n+m}$ et donner le nombre d'opérations élémentaires.