Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis **2008-2009**

Analyse Numérique

Série d'exercices n° : 7

Exercice 1

Soient $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et P son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$).

1– Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f^{(n)}(\xi) = P^{(n)}(\xi)$.

2– En déduire que

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

où $f[x_0, \cdots, x_n]$ désigne la différence divisée de f aux points $x_0, \ldots, x_n$.

Exercice 2

On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et $(n + 2)$ points distincts $x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b$ de $\mathbb{R}$.

Soient P_a et P_b les deux polynômes d'interpolation de Lagrange de f respectivement aux points $x_0, \ldots, x_{n-1}, a$ et $x_0, \ldots, x_{n-1}, b$:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} P_a(x_i) & = & f(x_i) & i = 0, \ldots, n-1 \\ P_a(a) & = & f(a) & \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcll} P_b(x_i) & = & f(x_i) & i = 0, \ldots, n-1 \\ P_b(b) & = & f(b) & \end{array} \right.$$

Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \ldots, x_{n-1}, a, b$.

Donner l'expression de P en fonction de P_a, P_b, a et b.

Exercice 3

Soient f et $\bar{f}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $x_0, \ldots.., x_n$, $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On note par P_n (respectivement $\bar{P}_n$) le polynôme d'interpolation de Lagrange de f (respectivement $\bar{f}$) aux points $x_0, \ldots.., x_n$.

1. Rappeler l'expression de P_n (respectivement $\bar{P}_n$) en fonction de $L_i(x)$ et $f(x_i)$ (respectivement $\bar{f}(x_i)$), où $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, $i = 0, \ldots.n$.

2. Montrer que
$$||P_n - \bar{P}_n||_\infty \leq \Lambda_n \; ||f - \bar{f}||_\infty$$
où $\Lambda_n = || \sum_{i=0}^{n} |L_i| \, ||_\infty$.

3. En déduire que
$$||f - P_n||_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{q \in \mathcal{P}_n} ||f - q||_\infty$$
(Notation: $||g||_\infty = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|$; $\mathcal{P}_n$ = l'ensemble des polynômes de degré$\leq n$).

Exercice 4

Soit a et b deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3.
On souhaite approcher $D_2 f \equiv f''(\frac{a+b}{2})$ par une expression du type :

$$\Delta_2 f \equiv \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(\frac{a+b}{2}) + \lambda_2 f(b)$$

de telle sorte que $E(f) \equiv D_2 f - \Delta_2 f$ vérifie :

$$(1) \qquad \forall P \in \mathcal{P}_2, \qquad E(P) \equiv D_2 P - \Delta_2 P = 0$$

On supposera dans toute la suite que les réels λ_0, λ_1 et λ_2 sont tels que la propriété (1) soit vérifiée.

1– Montrer que $f[a, \frac{a+b}{2}, b] = \frac{1}{2}\Delta_2 f$, où $f[a, \frac{a+b}{2}, b]$ désigne la différence divisée d'ordre 2 de f aux points $a, \frac{a+b}{2}, b$.

2– Soit P_f le polynôme d'interpolation de Lagrande de f aux points $a, \frac{a+b}{2}, b$ et $r(x) = f(x) - P_f(x)$.

2–a Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $r''(c) = 0$.

2–b Montrer que $E(f) = r''(\frac{a+b}{2})$.

2–c En déduire que

$$|E(f)| \leq \frac{b-a}{2} \sup_{x\in[a,b]} |f'''(x)|$$

3– Calculer les réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ en fonction de a et b pour que la propriété (1) soit vérifiée.

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $(n+1)$ points distincts de $[-1,1]$.

Soient f une fonction définie sur $[-1,1]$ de classe C^{2n+2} et P son polynôme d'interpolation d'Hermite aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ vérifiant : $\forall\, i = 0, \ldots, n, \qquad P(t_i) = f(t_i) \quad , \quad P'(t_i) = f'(t_i)$

1– Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $\xi_t \in [-1,1]$ (dépendant de t) tel que l'erreur d'interpolation $E(t) = f(t) - P(t)$ soit donnée par :

$$E(t) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_t)}{(2n+2)!}\Pi_{2n+2}(t), \qquad \text{où } \Pi_{2n+2}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-t_i)^2.$$

Indication : On pourra considérer, pour t fixé et $t \neq t_i, i = 0, \ldots, n$, la fonction F définie pour $x \in [-1,1]$ par :

$$F(x) = E(x) - \frac{E(t)}{\Pi_{2n+2}(t)}\Pi_{2n+2}(x)$$

2– On considère les $(2n+2)$ polynômes H_i et K_i, $0 \leq i \leq n$, définis par :

$$H_i(t) = (t-t_i)L_i^2(t) \quad , \quad K_i(t) = [1 - 2(t-t_i)L_i'(t_i)]\, L_i^2(t)$$

où les polynômes de Lagrange L_i sont donnés par :

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

2–a Calculer $H_i(t_j)$, $K_i(t_j)$, $H_i'(t_j)$, $K_i'(t_j)$, pour $i, j = 0, 1, \ldots, n$.
2–b Soit W le polynôme défini par : $W(t) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j)K_j(t) + \sum_{j=0}^{n} f'(t_j)H_j(t)$
Calculer $W(t_i)$ et $W'(t_i)$, pour $i = 0, \ldots, n$. En déduire que $W = P$, où P est le polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n$.