Problème II1
Intégration des fonctions périodiques par la méthode des trapèzes

On considère une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([0,1])$ et la méthode des trapèzes

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1))$$

1. Montrez que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1)) - \int_0^1 (x-\frac{1}{2})\,f'(x)\,dx$$

Corrigé : Une intégration par parties du dernier terme donne :

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})\,f'(x)\,dx = \left[(x-\frac{1}{2})f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$$

d'où le résultat demandé.

2. Montrez par récurrence que pour $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx =& \ \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1)) + \alpha_1 \int_0^1 f'(x)\,dx \\ +& \ \alpha_2 \int_0^1 f''(x)\,dx + \ldots + \alpha_m \int_0^1 f^{(m)}(x)\,dx + \int_0^1 p_{m+1}(x)\,f^{(m+1)}(x)\,dx\end{aligned}$$

où la suite de polynômes (p_i) et la suite de réels (α_i) sont données par les relations de récurrence :

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1(x) = -\left(x-\dfrac{1}{2}\right), \ \alpha_1 = 0\ , \\ p_{k+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (\alpha_k - p_k(t))\,dt, \ \alpha_{k+1} = \int_0^1 p_{k+1}(t)\,dt \end{cases}$$

Corrigé : D'après la question précédente la relation est vraie pour $m=0$, supposons la vraie à l'ordre $m=k$ et démontrons la à l'ordre $k+1$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p_{k+1}(x)\, f^{(k+1)}(x)\, dx &= \left[\left(\int_0^x p_{k+1}(t)dt\right) f^{(k+1)}(x)\right]_0^1 \\
&- \int_0^1 \left(\int_0^x p_{k+1}(t)dt\right) f^{(k+2)}(x)\, dx \\
&= \alpha_{k+1} f^{(k+1)}(1) + \int_0^1 (p_{k+2}(x) - x\,\alpha_{k+1})\, f^{(k+2)}(x)\, dx \\
&= \alpha_{k+1}\left(f^{(k+1)}(1) - \left[x\, f^{(k+1)}(x)\right]_0^1 + \int_0^1 f^{(k+1)}(x)\, dx\right) \\
&+ \int_0^1 p_{k+2}(x)\, f^{(k+2)}(x)\, dx \\
&= \alpha_{k+1} \int_0^1 f^{(k+1)}(x)\, dx + \int_0^1 p_{k+2}(x)\, f^{(k+2)}(x)\, dx
\end{aligned}$$

d'où la formule de récurrence.

3. Montrez par récurrence que $\forall k \geq 1$, $\forall x$, $p_k(x) = (-1)^k p_k(1-x)$ et $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k$.

   Corrigé : La propriété est vraie pour $k = 1$, supposons la vraie au rang k et démontrons la au rang $k+1$.

$$\begin{aligned}
p_{k+1}(1-x) &= \int_0^{1-x} (\alpha_k - p_k(t))\, dt \\
&= \int_0^1 (\alpha_k - p_k(t))\, dt + \int_1^{1-x} (\alpha_k - p_k(t))\, dt \\
&= -\int_0^x (\alpha_k - p_k(1-u))\, du = -\int_0^x (\alpha_k - (-1)^k p_k(u))\, du
\end{aligned}$$

   d'où le premier résultat puisque par hypothèse de récurrence $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k$. Maintenant, pour $k+1$ impair, p_{k+1} est symétrique par rapport au point $x = \frac{1}{2}, y = 0$ et donc son intégrale sur $[0,1]$, α_{k+1} est nulle, ce qui prouve la relation $\alpha_{k+1} = (-1)^{k+1}\alpha_{k+1}$.

4. En déduire que si $f \in C^{n+1}([0,1])$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_0^1 f^{(2j)}(x)\, dx + \int_0^1 p_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(x)\, dx$$

   avec $[n/2]$ la partie entière de $n/2$.

   Corrigé : La relation $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k$. équivaut à $\alpha_k = 0$ pour k impair, en conséquence la formule se déduit de celle de la question 2.

5. Notons par $\tilde{p}_m$ la fonction périodique de période 1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{p}_m(x) = p_m(x - [x]), \quad \text{où } [x] \text{ désigne la partie entière de } x.$$

   Montrer qu'alors, pour $k \geq 1$ entier et $g \in C^{n+1}([0,k])$

$$\int_0^k g(x)\, dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}(g(i) + g(i+1)) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_0^k g^{(2j)}(x)\, dx + \int_0^k \tilde{p}_{n+1}(x)\, g^{(n+1)}(x)\, dx$$

Corrigé : Par translation la formule de la question 4 est valable sur tout intervalle $[i, i+1]$, à condition de remplacer $p_{n+1}(x)$ par $p_{n+1}(x-i) = \tilde{p}_{n+1}(x)$, aussi appliquons la à la fonction g :

$$\int_i^{i+1} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(g(i) + g(i+1)\right) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_i^{i+1} g^{(2j)}(x)\,dx + \int_i^{i+1} \tilde{p}_{n+1}(x)\, g^{(n+1)}(x)\,dx$$

On obtient alors la formule demandée en sommant ces formules pour i de 0 à $k-1$.

6. On se place sur l'intervalle borné $[a, b]$ divisé en k intervalles égaux par la subdivision

$$x_i = a + i\,h,\; h = \frac{b-a}{k}\;.$$

On note

$$T_k(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_o) + f(x_1) + \ldots + f(x_{k-1}) + \frac{1}{2}f(x_k)\right]$$

la formule des trapèzes composée sur l'intervalle $[a, b]$.
En utilisant le changement de variable $\varphi(t) = f(a + th)$ et la formule de la question 5 montrez que pour $f \in C^{n+1}([a, b])$

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_k(f) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)\,dx + h^{n+1} \int_a^b \tilde{p}_{n+1}\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(n+1)}(x)\,dx$$

Corrigé : Avec le changement de variable indiqué et la formule de la question 5 on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = &\; h \int_0^k \varphi(t)\,dt \\
= &\; h \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}\left(\varphi(i) + \varphi(i+1)\right) \\
&+ h \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_0^k \varphi^{(2j)}(x)\,dx + h \int_0^k \tilde{p}_{n+1}(x)\, \varphi^{(n+1)}(x)\,dx \\
= &\; h \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}\left(f(x_i)) + f((x_{i+1})\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \alpha_{2j} \int_a^b h^{2j} f^{(2j)}(x)\,dx + \int_a^b \tilde{p}_{n+1}\left(\frac{x-a}{h}\right) h^{n+1} f^{(n+1)}(x)\,dx
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

7. Montrez que si f est périodique de période $b - a$ et qu'elle est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_k(f)\right| \leq C_n h^{n+1}$$

avec C_n indépendant de h dont on donnera une majoration.
On a ainsi démontré la super convergence de la méthode des trapèzes pour les fonctions périodiques intégrées sur une période complète.

Corrigé : Si f est périodique de période $b-a$:

$$\int_a^b f^{(2j)}(x) = f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a) = 0$$

et donc d'après la formule de la question 6 :

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_k(f) + h^{n+1} \int_a^b \tilde{p}_{n+1}(\frac{x-a}{h})\, f^{(n+1)}(x)\,dx$$

d'où le résultat avec $C_n = (b-a)\sup_{x\in[0,1]} |p_{n+1}(x)| \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$