Université Paris-Dauphine
DE 2 Analyse Numérique

Année 2013/2014
Prof: BEY M-A

Rappels et compléments d'analyse

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle. Soient a et b dans I avec $a < b$.

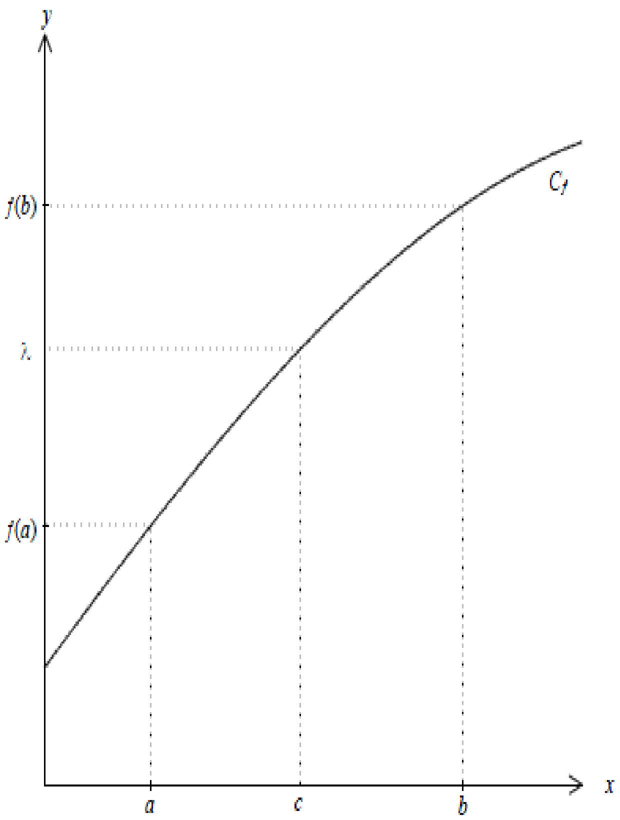
Soit f une application continue sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

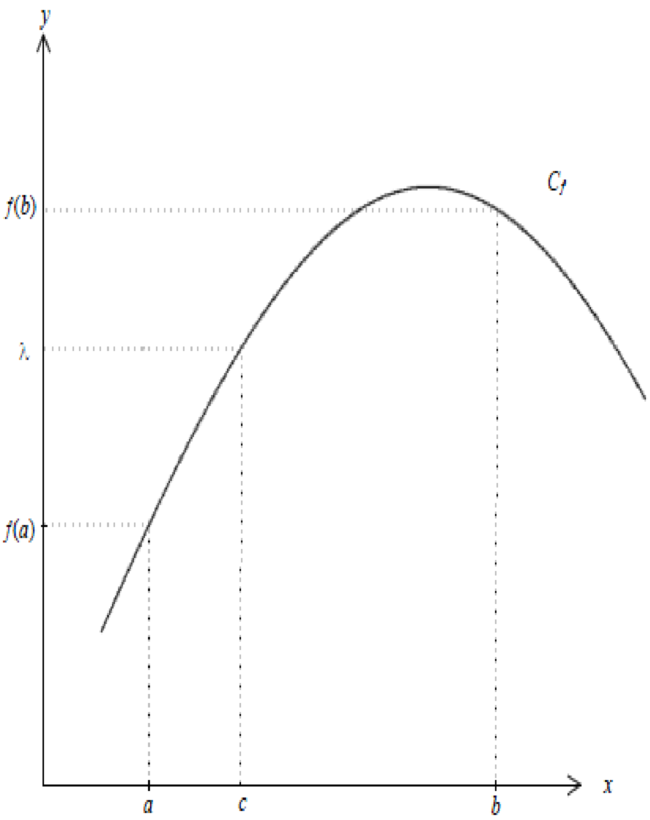
Il existe c dans $[a, b]$ tel que : $f(c) = \lambda$.

Illustrations

Cas d'une fonction monotone



Cas d'une fonction non monotone



Cas d'une fonction continue strictement monotone (Théorème de bijection)

Soit f une fonction dérivable (donc continue) sur un intervalle I.

Le T.V.I. affirme l'existence d'au moins une solution dans I à l'équation $f(x) = \lambda$ lorsque λ est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. Quelle condition ajouter pour avoir l'unicité ?

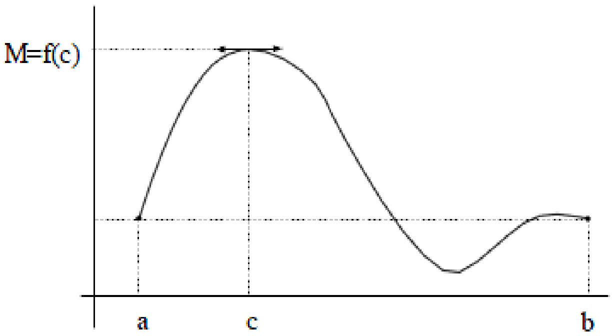
<u>Théorème de bijection</u> : Soit f une fonction dérivable (donc continue) et strictement monotone sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$. Pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

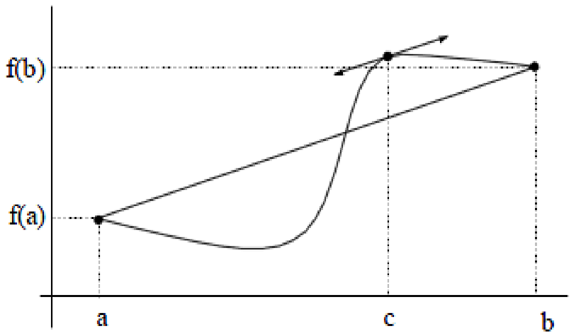
(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet une et une seule solution dans I)

Corollaire 1 (*L'équation* $f(x) = 0$)
Si f est continue et strictement monotone sur $I = [a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans I.

Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.





Théorème des Accroissements Finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

<u>Inégalité des accroissements finis</u>

Théorème *(version 1)*
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une application continue sur* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$, *et s'il existe* $m, M \in \mathbb{R}$ *tel que* $m \leq f'(x) \leq M$ *pour tout* $x \in]a, b[$, *alors*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Corollaire *(version 2)*
Avec les hypothèses du Théorème précédent, s'il existe un réel positif M *tel que* $|f'(x)| \leq M$ *pour tout* x *situé entre* a *et* b *(ici* a *et* b *sont donnés dans n'importe quel ordre), alors* $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

<u>Formule de Taylor-Lagrange</u>

Théorème *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une application de classe* C^n *sur* $[a, b]$ *et* $n+1$ *fois dérivable sur* $]a, b[$, *il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$