Applications linéaires

* * *

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient n, p et q des entiers naturels non nuls.

I. Applications linéaires

1. Définition

Définition 1.

1. *On dit que l'application $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est **linéaire** si :*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall u, v \in \mathbb{K}^p, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

   On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

2. *Lorsque $p = n$, on dit que f est un **endomorphisme** de $\mathbb{K}^n$. On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$.*

Exemples 1.

1. Soit $f : (x, y, z) \longmapsto (x - y + 2z, 3x + z)$. On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
2. Soit $g : (x, y) \longmapsto (x - 2y, 3x + y)$. On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Remarque 1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \forall\, (u, v) \in (\mathbb{K}^p)^2,\; f(u + v) = f(u) + f(v), \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\; \forall\, u \in \mathbb{K}^p,\; f(\lambda u) = \lambda f(u). \end{cases}$

Proposition 1. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, alors $f\left(0_{\mathbb{K}^p}\right) = 0_{\mathbb{K}^n}$.*

Proposition 2. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors,*

$$\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{K}, \quad \forall\, u_1, \dots, u_q \in \mathbb{K}^p, \quad f\left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=0}^{q} \lambda_k f(u_k).$$

2. Opérations sur les applications linéaires

Proposition 3. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,*

1. $f + g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$,
2. $\lambda f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Remarque 2. En d'autres termes, l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est stable par combinaisons linéaires.

Proposition 4. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors, $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^n)$.*

Remarque 3. En particulier, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, alors $f^q \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Proposition 5. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$.*

Définition 2.

1. *On appelle* ***isomorphisme*** *de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *toute application linéaire bijective de* $\mathbb{K}^p$ *sur* $\mathbb{K}^n$*.*
2. *On appelle* ***automorphisme*** *de* $\mathbb{K}^n$ *tout endomorphisme bijectif de* $\mathbb{K}^n$*.*

II. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

1. Proposition

Proposition 6. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$*.*

1. *Soit* U *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$*, alors* $f(U)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$*.*
2. *Soit* V *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$*, alors* $f^{-1}(V)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$*.*

2. Image - Noyau

Définition 3. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$*.*

1. *On appelle* ***noyau*** *de* f *le sous-ensemble de* $\mathbb{K}^p$ *noté* $\operatorname{Ker} f$ *et défini par :*

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in \mathbb{K}^p,\ f(u) = 0_{\mathbb{K}^n}\}.$$

2. *On appelle* ***image*** *de* f *le sous-ensemble de* $\mathbb{K}^n$ *noté* $\operatorname{Im} f$ *et défini par :*

$$\operatorname{Im} f = \{f(u),\ u \in \mathbb{K}^p\}.$$

Remarque 4.

1. $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des antécédents par f de $0_{\mathbb{K}^n}$: $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_{\mathbb{K}^n}\})$.
2. $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des images par f des éléments de E : $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Exercice 1. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires définies précédemment.

Proposition 7. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$*. Alors,*

1. $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$*.*
2. $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$*.*

3. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité

Théorème 1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$*. Alors,*

1. f *est injective* $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$*.*
2. f *est surjective* $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{K}^n$*.*

Exemples 2.

1. L'application $f : (x, y, z) \longmapsto (x - y + 2z, 3x + z)$ est surjective mais non injective.
2. L'application $g : (x, y) \longmapsto (x - 2y, 3x + y)$ est injective et surjective c'est une bijection.

III. Applications linéaires et bases

Théorème 2. *Soient* $(e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* $\mathbb{K}^p$ *et* $v_1, \ldots, v_p$ *des vecteurs de* $\mathbb{K}^n$. *Alors, il existe une unique application linéaire* f *de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *telle que :*

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, p\}, \quad f(e_i) = v_i.$$

Corollaire 1. *Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.*

Proposition 8. *Soient* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* $\mathbb{K}^p$. *Alors,*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big).$$

Proposition 9. *Soient* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* $\mathbb{K}^p$. *Alors,*

1. f *est injective* $\Leftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ *est une famille libre de* $\mathbb{K}^n$.
2. f *est surjective* $\Leftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}^n$.
3. f *est bijective* $\Leftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ *est une base de* $\mathbb{K}^n$ *(dans ce cas* $n = p$*).*

Exemples 3. Cas des applications linéaires f et g.

IV. Matrices d'une application linéaire

1. Définition

Définition 4. *Soient* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots f_n)$ *une base de* $\mathbb{K}^n$. *On appelle* ***matrice*** *de* f *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *notée* $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f$ *et dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs* $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *:*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big).$$

Remarques 5.

1. Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on note : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
2. Lorsque les bases considérées sont les bases canoniques, on ne les note pas.

Exemples 4. Donner les matrices des applications linéaires f et g des exemples précédents.

Proposition 10. *Soient* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, *on note* $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f$. *Pour tout* $u \in \mathbb{K}^p$, *on a*

$$Y = AX,$$

où $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ *et* $Y = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} f(u)$.

Exemples 5.

1. Cas des applications linéaires f et g dans les bases canoniques.
2. Matrice de id_E dans une base quelconque de E.

Proposition 11. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors A est la matrice dans les bases canoniques d'une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, appelée **application linéaire canoniquement associée** à A.*

Remarque 6. **Important** : ainsi, on associe à toute application linéaire une unique matrice dans les bases canoniques et réciproquement.

Exemples 6. Déterminer les applications linéaires f, g et h canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 7. Recherche du noyau et de l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A.

2. Opérations sur les matrices

Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{B}'$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}''$ une base de $\mathbb{K}^q$.

Proposition 12. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,*

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} g$,
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f$.

Proposition 13. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^q)$. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} g \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f.$$

En particulier, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$, alors pour tout entier k :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f\big)^k.$$

Exemple 7. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ et $A = \mathrm{Mat}\, f$ la matrice de f dans les bases canoniques.
Exprimer $\mathrm{Mat}(f^3 - 4f + id)$ à l'aide de la matrice A.

Proposition 14. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.*
Alors, f est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f$ est une matrice carrée inversible.
Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f\big)^{-1}.$$

3. Changement de base

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ deux bases de $\mathbb{K}^p$.

Définition 5. *On appelle **matrice de passage** des bases $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice carrée **inversible** de taille p notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou plus simplement P et définie par :*

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_p).$$

Remarque 8. Il s'agit de la matrice des coordonnées de vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2. Soient $u = (0,1,0)$, $v = (2,-4,0)$ et $w = (1,1,1)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w).

Proposition 15. *Soit $u \in \mathbb{K}^p$. On note $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ et $X' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} u$. Alors, on a :*

$$X = PX',$$

où $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Exemple 8.

Théorème 3. *On note $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} f$. Alors, on a :*

$$A' = P^{-1}AP,$$

où $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'application linéaire f canoniquement associée à A.
2. Soient $u = (1,1)$ et $v = (1,2)$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Donner la matrice A' de f dans la base (u,v) trouvée précédemment.
4. Donner la relation entre A, A' et P, ù P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v) et retrouver le résultat précédent.

V. Rang d'une application linéaire

1. Définition

Définition 6. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On appelle **rang** de f la dimension de l'image de f :*

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.}$$

Remarque 9. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$. On sait que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$. On en déduit que :

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big).}$$

2. Théorème du rang - applications

Théorème 4 (Théorème du rang)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors, on a :*

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Remarque 10. Ce théorème est utile pour rechercher rapidement $\operatorname{Im} f$ connaissant $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z) = (3z, -x+y+3z, z)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de et $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Proposition 16. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$. Alors, on a*

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective.}$$

3. Détermination pratique du rang

Proposition 17. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et A une matrice de f dans des bases quelconques. Alors,*

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A.}$$

Proposition 18. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, on a :*

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left({}^{\mathrm{t}}A\right).}$$

Remarque 11. On rappelle que le rang d'une matrice A est égal au rang d'un système linéaire qui lui est associé, par exemple le rang du système linéaire homogène :

$$AX = 0.$$