

TD : Méthodes itératives.

Ex 10

Relation de récurrence

$$(R): \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ x^{(P_2+1)} = x^{(P_2)} - \alpha (A x^{(P_2)} - b) \\ \forall P_2 \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

① Supposons la suite $x^{(P_2)}$ convergente de limite x , en passant à la limite dans l'équation (R) on obtient

$$x = x - \alpha (A x - b)$$

équivalent $\alpha (A x - b) = 0.$

D'où l'on tire, puisque $\alpha \neq 0$, $A x = b$.
 x est donc bien la solution du système linéaire $A x = b$.

② Nous avons :

$$x^{(P_2+1)} = x^{(P_2)} - \alpha (A x^{(P_2)} - b) = (I_n - \alpha A) x^{(P_2)} + \alpha b.$$

La matrice d'itération de la méthode de Richardson est $B = (I_n - \alpha A)$.

Pour que la méthode converge il faut et il suffit que le rayon spectral de B soit inférieur strictement à 1 ($\rho(B) < 1$)

Les valeurs propres de B se déduisent

P_1

seulement de celles de A (qui sont réelles)
 cela s'écrit $-1 < 1 - \alpha \lambda_A < 1$
 pour toute valeur propre de A . ce qui
 donne la condition $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_A}$

Or pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Remarquons $L_1 + L_2 = L_3$.

donc $\text{rang}(A) = 2$

d'après le théorème de rang nous avons:

$$\dim \text{Ker}(A) = 3 - \text{rang}(A) = 1.$$

par suite 0 est une valeur propre de la
 matrice A .

dans ce cas nous avons $0 < \alpha < \frac{2}{0} = \infty$.

Par conséquent, il n'existe pas α non nul.

La méthode converge.

③ De la même façon que précédemment.
 par la méthode converge, il est condition
 nécessaire et suffisante, il faut:

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_A}$$

Puisque la matrice est définie $\oplus$, donc les valeurs
 propres de A sont strict $\oplus$. Par conséquent.

CNS.

P2

$$\alpha < \frac{2}{\rho(A)}$$

EX 11. (svg de la méthode de Richardson pour une matrice symétrique)

A matrice symétrique d'ordre n . tq
 $\exists c > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (Av, v) \geq c \|v\|_2^2$

① Soit $v \in \mathbb{R}^n$; $v \in \text{Ker}(A) \Rightarrow Av = 0$.
d'où $0 = \underbrace{(Av, v)}_0 \geq c \|v\|_2^2$

donc $\|v\|_2^2 = 0$ puisque $c > 0$.
par suite $v = 0$.

CL: $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

Nous pouvons conclure que A inversible
et donc $x = A^{-1} \cdot b$.

CL: Le système linéaire $Ax = b$ admet une
unique solution.

② (R) :
$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donnée.} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha (Ax^{(k)} - b) \end{cases}$$

Notons $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b$ le résidu.

② Now avons

$$x^{(P_2)} = x^{(P_2-1)} - \alpha (A x^{(P_2-1)} - b)$$

$$\Leftrightarrow x^{(P_2)} - x = x^{(P_2-1)} - \alpha (A x^{(P_2-1)} - b) - x$$

$$A x^{(P_2)} - \frac{A x}{b} = A x^{(P_2-1)} - \alpha A (A x^{(P_2-1)} - b) - \frac{A x}{b}$$

$$A x^{(P_2)} - b = A x^{(P_2-1)} - b - \alpha A (A x^{(P_2-1)} - b)$$

$$z^{(P_2)} = z^{(P_2-1)} - \alpha A z^{(P_2-1)}$$

$$\Leftrightarrow z^{(P_2)} = (I_n - \alpha A) z^{(P_2-1)}$$

Par appens, on a.

$$z^{(P_2)} = (I_n - \alpha A) z^{(P_2-1)}$$

$$z^{(P_2-1)} = (I_n - \alpha A) z^{(P_2-2)}$$

$$z^{(P_2-2)} = (I_n - \alpha A) z^{(P_2-3)}$$

$$\vdots$$

$$z^{(A)} = (I_n - \alpha A) z^{(0)}$$

On fait le produit, on conclut.

$$z^{(P_2)} = (I_n - \alpha A)^{P_2} z^{(0)}$$

b)

$$\begin{aligned} \|(I_n - \alpha A)x\|_2^2 &= \langle (I_n - \alpha A)x, (I_n - \alpha A)x \rangle \\ &= \langle I_n x, I_n x \rangle - 2\alpha \langle I_n x, Ax \rangle + \alpha^2 \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \|I_n x\|_2^2 - 2\alpha \langle x, Ax \rangle + \alpha^2 \|Ax\|_2^2 \end{aligned}$$

Come $\|x\|_2 = 1$ et $(Ax, x) \geq c\|x\|_2^2$
(d'après ①)

donc

$$\begin{aligned} \|(I_n - \alpha A)x\|_2^2 &\leq 1 - 2\alpha c + \alpha^2 \|Ax\|_2^2 \\ &\leq 1 - 2\alpha c + \alpha^2 \|A\|_2^2 \underbrace{\|x\|_2^2}_1 \end{aligned}$$

⑥ si on suppose que

$$\begin{aligned} \alpha^2 \|A\|_2^2 - 2c\alpha + 1 &< 1 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 \|A\|_2^2 - 2c\alpha &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2c}{\|A\|_2^2} \end{aligned}$$

CL: $\|I_n - \alpha A\|_2 < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2c}{\|A\|_2^2}$

③ D'après Ex 1 : nous avons $\|A\|_2 > \rho(A)$
donc d'après Question 2) c) la suite $x^{(k)}$
Cvg si $0 < \alpha < \frac{2c}{(\rho(A))^2}$
P.S.