Matrice d'une application linéaire

- Bases $\left(\mathbf{e}_j, j = 1, \cdots, n\right)$ de E et $\left(\mathbf{f}_i, i = 1, \cdots, m\right)$ de F
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{i,j}\mathbf{f}_i$
- $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j \in E$
- $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j\right)\mathbf{f}_i$
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad Y = AX$
- Retenir que les n colonnes j de A sont données par les images $f(\mathbf{e}_j)$
- Espace vectoriel des matrices de dimension m, n: $\mathcal{M}_{m,n}$ (à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- Matrices remarquables: diagonale, symétrique, triangulaires inférieure ou supérieure

Exercice: produit de matrices versus composition d'applications linéaires

- Soient E, F, G des e.v de dimensions resp. n,m,p, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$
- Des bases étant données, f a pour matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et g a pour matrice $B \in \mathcal{M}_{p,m}$
- $g \circ f$ a pour matrice le produit $BA \in \mathcal{M}_{p,n}$ tel que

$$(BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} B_{i,k} A_{k,j}$$

- Produit de matrices: $\mathcal{M}_{p,m} \times \mathcal{M}_{m,n} \to \mathcal{M}_{p,n}$
  - produit matrice vecteur: $\mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{n,1} \to \mathcal{M}_{m,1}$
  - produit scalaire de deux vecteurs: ligne . colonne $\mathcal{M}_{1,n} \times \mathcal{M}_{n,1} \to \mathcal{M}_{1,1}$
  - produit tensoriel de deux vecteurs: colonne. ligne $\mathcal{M}_{n,1} \times \mathcal{M}_{1,n} \to \mathcal{M}_{n,n}$

Exercice: changements de base pour les vecteurs et les matrices

- P: matrice de passage d'une base dans une autre $\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^{n} P_{k,j} \mathbf{e}_k$ (colonnes de la nouvelle base dans l'ancienne)
- Changement de base pour les coordonnées des vecteurs: $X = P\tilde{X}$.
- Changement de base pour les matrices des applications linéaires: $X = P\tilde{X}$, $Y = Q\tilde{Y}$ et $\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}$, $Y = AX$ implique que

$$\tilde{A} = Q^{-1}AP.$$

Matrices carrés inversibles

- $A \in \mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{M}_n$ est inversible ssi l'une des propriétés suivantes est vérifiée
  - Il existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}$ tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  - A est injective ie $AX = 0 \Rightarrow X = 0$
  - A est surjective ie $\mathrm{Im}(A) = \{AX,\ X \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$

- $A, B \in \mathcal{M}_n$ inversibles
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Transposition de matrices

- $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on définit $A^t \in \mathcal{M}_{n,m}$ par

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i} \text{ pour tous } i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$$

- Produit scalaire canonique de deux vecteurs (colonnes) $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$X^t Y = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

- Matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est symétrique ssi

$$A^t = A$$

Diagonalisation d'une matrice carrée symétrique $A \in \mathcal{M}_n$

- Les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ d'une matrice réelle symétrique A sont réelles et il existe une base orthonormée de vecteurs propres $F^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, n$ telle que
$$AF^i = \lambda_i F^i \text{ et } (F^i)^t F^j = \delta_{i,j} \text{ pour tous } i, j = 1, \cdots, n$$
- Si P est la matrice de passage de la base canonique dans la base F^i, $i = 1, \ldots, n$, alors on a
$$P^{-1} = P^t$$
et
$$P^t A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Déterminants de n vecteurs dans un e.v. E de dimension n pour une base donnée

- Unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 sur la base
  - $\text{Det}\left(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{v}_n\right) = 0$ (alternée)
  - Antisymétrie:

$$\text{Det}\left(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_n\right) = -\text{Det}\left(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_n\right)$$

  - On a donc aussi pour toute permutation σ de $\{1, \cdots, n\}$,

$$\text{Det}\left(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\right) = \text{sign}(\sigma)\text{Det}\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}\right)$$

- Déterminant d'une matrice carrée A = déterminant des vecteurs colonnes

$$\text{Det}\left(A\right) = \text{Det}\left(A_{.,1}, \cdots, A_{.,n}\right) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} \text{sign}(\sigma) A_{\sigma(i),i}$$

Propriétés du déterminant

- Les vecteurs colonnes de A sont libres ssi $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- Donc A est inversible ssi $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(BA)$
- $\mathrm{Det}(A^t) = \mathrm{Det}(A)$
- Développement par rapport aux lignes ou aux colonnes

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathrm{Det}(A^{(i,j)}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathrm{Det}(A^{(i,j)})$$

Normes matricielles

- Une norme matricielle sur l'e.v. $\mathcal{M}_n$ est une norme telle que

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

- Une norme matricielle induite par une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme matricielle définie par

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

- On a pour une norme matricielle induite: $\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

Exercice: exemples de normes induites

- $\|A\|_\infty = \mathrm{Sup}_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \max_{i=1,\cdots,n}\sum_{j=1}^n |A_{i,j}|$
- $\|A\|_1 = \mathrm{Sup}_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} = \max_{j=1,\cdots,n}\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$
- $\|A\|_2 = \mathrm{Sup}_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} = \rho({}^tAA)^{1/2}$

Convergence de la suite A^k pour $A \in \mathcal{M}_n$

- Rayon spectral $\rho(A)$, $A \in \mathcal{M}_n$ est le module de la valeur propre maximale de A dans $\mathbb{C}$.
- On admettra le lemme suivant:
  - $\rho(A) < 1$ ssi $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$ quel que soit la norme sur $\mathcal{M}_n$
  - $\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k}$ quel que soit la norme sur $\mathcal{M}_n$
  - $\rho(A) \leq \|A\|$ quel que soit la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$

Matrices de la forme $I + A$ ou $I - A$

- Si $\rho(A) < 1$ alors les matrices $I + A$ et $I - A$ sont inversibles
- La série de terme général A^k converge (vers $(I - A)^{-1}$ ssi $\rho(A) < 1$
  - Preuve: $\sum_{k=0}^{N} A^k(I - A) = I - A^{N+1}$ et utiliser le lemme précédent
- Si $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle, alors $I - A$ est inversible et on a $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ (idem pour $I + A$)

Méthode d'élimination de Gauss: exemple

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b \quad \det(A) = 5$$

Descente: élimination sur la première colonne (x_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Descente: élimination sur la deuxième colonne (x_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{d'où par remontée } X = \begin{pmatrix} -6/5 \\ -3/5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

factorisation de Gauss: exemple

D'où $UX = b'$ avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} b'$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} b'$$

D'où la factorisation de Gauss

$$A = LU$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A^{(1)} = A,\ b^{(1)} = b$$

$$A^{(2)} = L^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{a^{(1)}_{2,1}}{a^{(1)}_{1,1}} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -\frac{a^{(1)}_{k,1}}{a^{(1)}_{1,1}} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -\frac{a^{(1)}_{n,1}}{a^{(1)}_{1,1}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)}_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(1)}_{1,n} \\ a^{(1)}_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(1)}_{2,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a^{(1)}_{k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(1)}_{k,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a^{(1)}_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(1)}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } b^{(2)} = L^{(1)} b^{(1)}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a^{(1)}_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(1)}_{1,n} \\ 0 & a^{(2)}_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(2)}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a^{(2)}_{k,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(2)}_{k,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a^{(2)}_{n,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(2)}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ avec } a^{(2)}_{i,j} = a^{(1)}_{i,j} - \frac{a^{(1)}_{i,1} a^{(1)}_{1,j}}{a^{(1)}_{1,1}},\ i, j = 2, \cdots, n$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^{(k)}_{k+1,k}}{a^{(k)}_{k,k}} & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^{(k)}_{n,k}}{a^{(k)}_{k,k}} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)}_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(1)}_{1,n} \\ 0 & a^{(2)}_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(2)}_{2,n} \\ \vdots & 0 & a^{(k)}_{k,k} & \cdots & \cdots & a^{(k)}_{k,n} \\ 0 & \cdots & a^{(k)}_{k+1,k} & \cdots & \cdots & a^{(k)}_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a^{(k)}_{n,k} & \cdots & \cdots & a^{(k)}_{n,n} \end{pmatrix}$$

et $b^{(k+1)} = L^{(k)} b^{(k)}$

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a^{(1)}_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(1)}_{1,n} \\ 0 & a^{(2)}_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(2)}_{2,n} \\ \vdots & 0 & a^{(k)}_{k,k} & a^{(k)}_{k,k+1} & \cdots & a^{(k)}_{k,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a^{(k+1)}_{k+1,k+1} & \cdots & a^{(k+1)}_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^{(k+1)}_{n,k+1} & \cdots & a^{(k+1)}_{n,n} \end{pmatrix} \text{ avec } a^{(k+1)}_{i,j} = a^{(k)}_{i,j} - \frac{a^{(k)}_{i,k} a^{(k)}_{k,j}}{a^{(k)}_{k,k}}, \ i,j = k+1, \cdots, n$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A = LU$$

avec

$$U = A^{(n)}$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n,n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$A = LU$$

avec

$$U = A^{(n)}$$

$$L = \left(L^{(n-1)} \dots L^{(k)} \dots L^{(1)}\right)^{-1} = (L^{(1)})^{-1} \dots (L^{(k)})^{-1} \dots (L^{(n-1)})^{-1}$$

$$(L^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^{(k)}_{k+1,k}}{a^{(k)}_{k,k}} & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^{(k)}_{n,k}}{a^{(k)}_{k,k}} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$
(L^{(k)})^{-1}(L^{(k+1)})^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & \frac{a^{(k)}_{k+1,k}}{a^{(k)}_{k,k}} & 1 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & \frac{a^{(k+1)}_{k+2,k+1}}{a^{(k+1)}_{k+1,k+1}} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{a^{(k)}_{n,k}}{a^{(k)}_{k,k}} & \frac{a^{(k+1)}_{n,k+1}}{a^{(k+1)}_{k+1,k+1}} & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Généralisation à $A \in \mathcal{M}_n$ inversible: $AX = b$

$$L = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & 1 & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \frac{a_{k+2,k+1}^{(k+1)}}{a_{k+1,k+1}^{(k+1)}} & 1 & 0 \\
\frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \vdots & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \frac{a_{n,k+1}^{(k+1)}}{a_{k+1,k+1}^{(k+1)}} & \frac{a_{n,k}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1
\end{pmatrix}$$

Existence et unicité de la factorisation $A = LU$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on suppose que les sous matrices diagonales de dimension k

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

  sont inversibles pour tous $k = 1, \cdots n$.
- Alors la factorisation $A = LU$ avec $L_{i,i} = 1$, $i = 1, \cdots, n$ existe et est unique.

Preuve:

- Existence établie précédemment car on montre que le pivot $a^k_{k,k} \neq 0$
- Unicité: $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ implique $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I$

Algorithme: factorisation LU de $A \in \mathcal{M}_n$ inversible

Initialisation: $U = A$, $L = I$

- For $k = 1, \cdots, n-1$ (boucle sur les pivots)
  - For $i, j = k+1, \cdots, n$
    - $U_{i,j} \leftarrow U_{i,j} - \dfrac{U_{i,k}U_{k,j}}{U_{k,k}}$ (on suppose le pivot $U_{k,k}$ non nul)
  - End For
  - For $i = k+1, \cdots, n$
    - $L_{i,k} = \dfrac{U_{i,k}}{U_{k,k}}$
  - End For
- End For
- $U \leftarrow triu(U)$

Remarque 1: on a supposé que $U_{k,k} \neq 0$

Remarque 2: on peut tout stocker dans A au cours de l'algorithme

Résolution de $LUX = b$

Descente: $LY = b$

- For $i = 1, \cdots, n$
  - $Y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} Y_j$
- End For

Remontée: $UX = Y$

- For $i = n, \cdots, 1; -1$
  - $X_i = \dfrac{Y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j} X_j}{U_{i,i}}$
- End For

Complexité de l'algorithme

On compte le nombre d'additions et de multiplications et de divisions (opérations flottantes)

- Factorisation: $2/3n^3 + \mathcal{O}(n^2)$
- Descente remontée: $2n^2 + \mathcal{O}(n)$

Conservation de la largeur de bande

$$q = \max_{i,j=1,\cdots,n} \{|j-i| \text{ tel que } A_{i,j} \neq 0\}$$

La factorisation $A = LU$ précédente (sans pivotage) conserve la largeur de bande q pour U et L
Preuve: propriété vérifiée pour toutes les matrices $A^{(k)}$ à chaque étape $k = 1, \cdots, n$

Complexité:

- Factorisation: $2nq^2 + \mathcal{O}(nq)$
- Descente remontée: $2nq + \mathcal{O}(n)$

Algorithme: factorisation LU pour une matrice bande de largeur de bande q

Initialisation: $U = A$, $L = I$

- For $k = 1, \cdots, n-1$ (boucle sur les pivots)
  - For $i, j = k+1, \cdots, \max(k+q, n)$
    - $U_{i,j} \leftarrow U_{i,j} - \dfrac{U_{i,k} U_{k,j}}{U_{k,k}}$ (on suppose le pivot $U_{k,k}$ non nul)
  - End For
  - For $i = k+1, \cdots, \max(k+q, n)$
    - $L_{i,k} = \dfrac{U_{i,k}}{U_{k,k}}$
  - End For
- End For
- $U \leftarrow triu(U)$

Résolution de $LUX = b$ pour une matrice bande de largeur de bande q

Descente: $LY = b$

- For $i = 1, \cdots, n$
  - $Y_i = b_i - \sum_{j=\max(i-q,1)}^{i-1} L_{i,j} Y_j$
- End For

Remontée: $UX = Y$

- For $i = n, \cdots, 1; -1$
  - $X_i = \dfrac{Y_i - \sum_{j=i+1}^{\min(i+q,n)} U_{i,j} X_j}{U_{i,i}}$
- End For

Matrices de permutation

Bijection de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$
Première représentation:

$$P = \left(j_1, \cdots, j_n \right)$$

avec $j_i \in \{1, \cdots, n\}$ et $j_i \neq j_l$ pour $i \neq l$.

Action sur les vecteurs $b \in \mathbb{R}^n$: $(Pb)_i = b_{P(i)}$ pour $i = 1, \cdots, n$

D'où la représentation matricielle: $P_{i,j} = 1$ si $j = P(i)$, sinon 0. On a sur les matrices $A \in \mathcal{M}_n$:

$$(PA)_{i,j} = A_{P(i),j}.$$

Exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Pb = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_4 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Transpositions

$$\tau = (i_1, i_2)$$

est la permutation telle que

$$\tau(i_1) = i_2, \tau(i_2) = i_1, \tau(i) = i \ \forall \, i \neq i_1, i_2.$$

On a

$$\tau^2 = I,$$

donc

$$\tau^{-1} = \tau.$$

factorisation avec pivotage $PA = LU$

On a $A^{(1)} = A$ et pour $k = 1, \cdots, n-1$

$$A^{(k+1)} = L^{(k)} \tau^{(k)} A^{(k)}$$

avec $\tau^{(k)} = (k, i_k)$ pour $i_k \geq k$ tel que $|A^{(k)}_{i_k,k}| = max_{i=k,\cdots,n}|A^{(k)}_{i,k}|$.
D'où par récurrence

$$A^{(n)}X = UX = L^{(n-1)}\tau^{(n-1)}L^{(n-2)}\tau^{(n-2)}\cdots\tau^{(k+1)}L^{(k)}\tau^{(k)}\cdots\tau^{(2)}L^{(1)}\tau^{(1)}b$$

$$UX = L^{(n-1)}\Big(\tau^{(n-1)}L^{(n-2)}\tau^{(n-1)}\Big)\cdots\Big(\tau^{(n-1)}\cdots\tau^{(2)}L^{(1)}\tau^{(2)}\cdots\tau^{(n-1)}\Big)\Big(\tau^{(n-1)}\cdots\tau^{(1)}\Big)b$$

d'où

$$L = \Big(\tau^{(n-1)}\cdots\tau^{(2)}(L^{(1)})^{-1}\tau^{(2)}\cdots\tau^{(n-1)}\Big)\cdots\Big(\tau^{(n-1)}(L^{(n-2)})^{-1}\tau^{(n-1)}\Big)(L^{(n-1)})^{-1}$$

et

$$P = \Big(\tau^{(n-1)}\cdots\tau^{(2)}\tau^{(1)}\Big)$$

Algorithme avec pivotage partiel $PA = LU$

Initialisation: $U = A,\ L = I,\ P = (1, \cdots, n)$

- For $k = 1, \cdots, n-1$ (boucle sur les pivots)
  - $i_k = \text{argmax}_{i=k,\cdots,n}|U_{i,k}|$ (choix du pivot) transposition: $\tau = (k, i_k),\ i_k \geq k$
  - $U \leftarrow \tau U$ permutation des lignes de U
  - $L \leftarrow \tau L \tau$ permutation des lignes de L hors diagonale
  - $P \leftarrow \tau P$ mise à jour de la permutation P pour b
  - For $i, j = k+1, \cdots, n$
    - $U_{i,j} \leftarrow U_{i,j} - \dfrac{U_{i,k}U_{k,j}}{U_{k,k}}$
  - End For
  - For $i = k+1, \cdots, n$
    - $L_{i,k} = \dfrac{U_{i,k}}{U_{k,k}}$
  - End For
- End For
- $U \leftarrow triu(U)$

Algorithme avec pivotage partiel $PA = LU$ et avec stockage de L (sans la diagonale) et de U dans la matrice A

Initialisation: $P = (1, \cdots, n)$

- For $k = 1, \cdots, n-1$ (boucle sur les pivots)
  - $i_k = \text{argmax}_{i=k,\cdots,n}|A_{i,k}|$ (choix du pivot) transposition: $\tau = (k, i_k)$, $i_k \geq k$
  - $A \leftarrow \tau A$ permutation des lignes k et i_k
  - $P \leftarrow \tau P$ mise à jour de la permutation
  - For $i = k+1, \cdots, n$
    - $A_{i,k} \leftarrow \dfrac{A_{i,k}}{A_{k,k}}$
  - End For
  - For $i, j = k+1, \cdots, n$
    - $A_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - A_{i,k}A_{k,j}$
  - End For
- End For

L est la partie triangulaire inférieure stricte de A plus la diagonale unité.
U est la partie triangulaire supérieure de A (avec la diagonale).

Résolution de $PAX = LUX = Pb$ pour la factorisation avec pivotage P

Descente: $LY = Pb$

- For $i = 1, \cdots, n$
  - $Y_i = b_{P(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} Y_j$
- End For

Remontée: $UX = Y$

- For $i = n, \cdots, 1; -1$
  - $X_i = \dfrac{Y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j} X_j}{U_{i,i}}$
- End For

Conditionnement

Soit $\|\|$ la norme induite dans $\mathcal{M}_n$ par une norme $\|\|$ sur $\mathbb{R}^n$

$$\text{Conditionnement de } A \text{ inversible} \;:\; \text{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Cond}(A) \geq 1 \\ \text{Cond}(\alpha A) = \text{Cond}(A) \\ \text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\text{Cond}(B) \end{array}\right.$$

Soit A inversible et σ_1, σ_n les vp min et max de $A^t A$, on a pour la norme $\|\|_2$

$$\text{Cond}_2(A) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1}\right)^{1/2}$$

On en déduit que $\text{Cond}_2(A) = 1$ ssi $A = \alpha Q$ où Q matrice orthogonale

Pour A SDP de vp min et max λ_1 et λ_n, on a pour la norme $\|\|_2$

$$\text{Cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

Erreur d'arrondi

Soit A une matrice inversible, on cherche à estimer l'influence sur la solution d'une erreur d'arrondi sur le second membre b

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ A(x+\delta x) & = & b + \delta b \end{array} \right.$$

implique

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$