Jacobi

$C = D$ et $\alpha = 1$

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)$$

$$Dx^{k+1} = b - (A - D)x^k$$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j \neq i} A_{i,j}x_j^k$$

Gauss Seidel $A = D - E - F$

$C = D - E$ et $\alpha = 1$

$$x^{k+1} = x^k + (D - E)^{-1}(b - Ax^k)$$
$$(D - E)x^{k+1} = b + Fx^k$$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k$$

SOR $A = D - E - F$

Pour $i = 1, \cdots, n$:

$$\left\{ \begin{array}{rl} A_{i,i}\tilde{x}_i^{k+1} & = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k \\ x_i^{k+1} & = \omega\tilde{x}_i^{k+1} + (1-\omega)x_i^k \end{array} \right.$$

Vérification de $C = \frac{D}{\omega} - E$.

$$A_{i,i}\left(\frac{x_i^{k+1}}{\omega} - \frac{(1-\omega)}{\omega}x_i^k\right) = b_i - \sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^k$$

$$(\frac{D}{\omega} - E)x^{k+1} = b - \left(-F - \frac{(1-\omega)}{\omega}D\right)x^k = (\frac{D}{\omega} - E)x^k + (b - Ax^k)$$

Convergence de Gauss Seidel

Si A est une matrice SDP, alors $\rho\Big(I - (D-E)^{-1}A\Big) < 1$ et la méthode de Gauss Seidel converge

On va montrer que pour tous A SDP et M inversible telle que $\Big(M^t + M - A\Big)$ SDP alors

$$\rho(I - M^{-1}A) < 1$$

Preuve: on considère la norme sur $\mathbb{R}^n$ $\|x\|_\star^2 = (Ax, x)$ et on va montrer que

$$\|I - M^{-1}A\|_\star^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(I - M^{-1}A)x\|_\star^2}{\|x\|_\star^2} < 1$$

Soit $x \neq 0$, on définit $y \neq 0$ tel que $Ax = My$

$$\begin{aligned}
\|(I - M^{-1}A)x\|_\star^2 &= (A(x-y), (x-y)) \\
&= \|x\|_\star^2 + (Ay, y) - 2(Ax, y) \\
&= \|x\|_\star^2 + (Ay, y) - 2(My, y) \\
&= \|x\|_\star^2 - ((M^t + M - A)y, y) < \|x\|_\star^2
\end{aligned}$$

On conclut pour Gauss Seidel avec
$M^t + M - A = D - E + D - F - D + E + F = D > 0$