

Jacobi

$$C = D \text{ et } \alpha = 1$$

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)$$

$$Dx^{k+1} = b - (A - D)x^k$$

Pour $i = 1, \dots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j \neq i} A_{i,j}x_j^k$$

Gauss Seidel $A = D - E - F$

$$C = D - E \text{ et } \alpha = 1$$

$$x^{k+1} = x^k + (D - E)^{-1}(b - Ax^k)$$

$$(D - E)x^{k+1} = b + Fx^k$$

Pour $i = 1, \dots, n$:

$$A_{i,i}x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j < i} A_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j > i} A_{i,j}x_j^k$$

$$\text{SOR } A = D - E - F$$

Pour $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} A_{i,i} \tilde{x}_i^{k+1} = b_i - \sum_{j < i} A_{i,j} x_j^{k+1} - \sum_{j > i} A_{i,j} x_j^k \\ x_i^{k+1} = \omega \tilde{x}_i^{k+1} + (1 - \omega) x_i^k \end{cases}$$

Vérification de $C = \frac{D}{\omega} - E$.

$$A_{i,i} \left(\frac{x_i^{k+1}}{\omega} - \frac{(1 - \omega)}{\omega} x_i^k \right) = b_i - \sum_{j < i} A_{i,j} x_j^{k+1} - \sum_{j > i} A_{i,j} x_j^k$$

$$\left(\frac{D}{\omega} - E \right) x^{k+1} = b - \left(-F - \frac{(1 - \omega)}{\omega} D \right) x^k = \left(\frac{D}{\omega} - E \right) x^k + (b - Ax^k)$$

Convergence de Gauss Seidel

Si A est une matrice SDP, alors $\rho(I - (D - E)^{-1}A) < 1$ et la méthode de Gauss Seidel converge

On va montrer que pour tous A SDP et M inversible telle que $(M^t + M - A)$ SDP alors

$$\rho(I - M^{-1}A) < 1$$

Preuve: on considère la norme sur $\mathbb{R}^n$ $\|x\|_*^2 = (Ax, x)$ et on va montrer que

$$\|I - M^{-1}A\|_*^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(I - M^{-1}A)x\|_*^2}{\|x\|_*^2} < 1$$

Soit $x \neq 0$, on définit $y \neq 0$ tel que $Ax = My$

$$\begin{aligned} \|(I - M^{-1}A)x\|_*^2 &= (A(x - y), (x - y)) \\ &= \|x\|_*^2 + (Ay, y) - 2(Ax, y) \\ &= \|x\|_*^2 + (Ay, y) - 2(My, y) \\ &= \|x\|_*^2 - ((M^t + M - A)y, y) < \|x\|_*^2 \end{aligned}$$

On conclut pour Gauss Seidel avec

$$M^t + M - A = D - E + D - F - D + E + F = D > 0$$

Méthode de Richardson

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ solution de

$$Ax = b.$$

Méthode de Richardson: soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on construit une suite de solution x^k de la forme

$$x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k).$$

On a donc

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha A)(x^k - x),$$

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha A)^k(x^1 - x),$$

$$B = (I - \alpha A)$$

- Convergence: ssi $\rho(B) < 1$
- Taux de convergence: $\|B^k\|^{1/k} \rightarrow \rho(I - \alpha A)$

Méthode de Richardson pour les matrices SDP

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ SDP (Symétrique Définie Positive) et $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ ses valeurs propres par ordre croissant

$$\rho(I - \alpha A) = \max(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|)$$

$$\alpha_{opt} = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \max(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|)$$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}, \quad \rho(I - \alpha_{opt}A) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} < 1$$

Problème: on ne connaît pas les valeurs propres de A

Voir Exercice: Méthode de Richardson à pas variable

Méthode de Richardson pour les matrices SDP

Nombre d'itérations pour une précision fixée:

$$\|x^{k+1} - x\|_2 \leq \left(\rho(I - \alpha_{opt}A)\right)^k \|x^1 - x\|_2,$$

$$\|x^{k+1} - x\|_2 \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k \|x^1 - x\|_2,$$

On cherche le nb d'itération k pour atteindre une précision ϵ , ie

$$\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k \leq \epsilon,$$

$$k \geq \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(\frac{1+\frac{1}{\kappa}}{1-\frac{1}{\kappa}})}$$

Pour κ grand:

$$k \gtrsim \frac{\kappa}{2} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Méthode de Richardson à pas variable pour les matrices SDP

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ SDP (Symétrique Définie Positive).

On pose $e^k = x - x^k$, $r^k = Ae^k = b - Ax^k$,

et on considère l'algorithme itératif: x^1 donné et pour $k = 1, \dots$

$$\begin{cases} \alpha^k = \frac{(r^k, r^k)}{(Ar^k, r^k)}, \\ x^{k+1} = x^k + \alpha^k r^k. \end{cases}$$

On montre que

$$\alpha^k = \operatorname{Argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} (Ae^{k+1}, e^{k+1}) = \alpha^2 (Ar^k, r^k) - 2\alpha (r^k, r^k) + (Ae^k, e^k),$$

et

$$(Ae^{k+1}, e^{k+1}) = \left(1 - \frac{(r^k, r^k)^2}{(Ar^k, r^k)(A^{-1}r^k, r^k)}\right) (Ae^k, e^k),$$

d'où

$$(Ae^{k+1}, e^{k+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Cond}_2(A)}\right) (Ae^k, e^k)$$

Méthode de Richardson à pas variable pour les matrices SDP: algorithme

$$Ax = b \text{ avec } A \text{ matrice SDP}$$

- Choix de la précision ϵ sur le résidu relatif
- Initialisation: $x^1, r^1 = b - Ax^1, nr = nr^0 = \|r^1\|$
- Itérer tant que $\frac{nr}{nr^0} \geq \epsilon$
 - $p^k = Ar^k$
 - $\alpha^k = \frac{(r^k, r^k)}{(p^k, r^k)}$
 - $x^{k+1} = x^k + \alpha^k r^k$
 - $r^{k+1} = r^k - \alpha^k p^k$
 - $nr = \|r^{k+1}\|$

Méthode de Richardson préconditionnée

Préconditionnement: matrice $C \in \mathcal{M}_n$ inversible

$$x^{k+1} = x^k + \alpha C^{-1}(b - Ax^k)$$

$$(x^{k+1} - x) = (I - \alpha C^{-1}A)(x^k - x)$$

$$B = (I - \alpha C^{-1}A)$$

On cherche un preconditionnement C tel que

- $C \sim \alpha A$ ie $\rho(I - \alpha C^{-1}A) \ll 1$
- le système $Cy = r$ est peu coûteux à résoudre

Exemple des matrices et préconditionnements SDP

$A, C \in \mathcal{M}_n$ symétriques définies positives.

Soient $y = C^{1/2}x$, $y^k = C^{1/2}x^k$, $c = C^{-1/2}b$ on a

$$\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right)y = c,$$

La matrice $C^{-1/2}AC^{-1/2}$ est SDP, et

$$y^{k+1} = y^k + \alpha \left(c - C^{-1/2}AC^{-1/2}y^k\right)$$

Convergence ssi $\rho(I - \alpha C^{-1/2}AC^{-1/2}) < 1$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

$$\rho(I - \alpha_{opt} C^{-1/2}AC^{-1/2}) = \frac{\lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) - \lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

Exemple des matrices et préconditionnements SDP

$A, C \in \mathcal{M}_n$ symétriques définies positives.

Soient $y = C^{1/2}x$, $y^k = C^{1/2}x^k$, $c = C^{-1/2}b$ on a

$$\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right)y = c,$$

La matrice $C^{-1/2}AC^{-1/2}$ est SDP, et

$$y^{k+1} = y^k + \alpha \left(c - C^{-1/2}AC^{-1/2}y^k \right)$$

Convergence ssi $\rho(I - \alpha C^{-1/2}AC^{-1/2}) < 1$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

$$\rho(I - \alpha_{opt} C^{-1/2}AC^{-1/2}) = \frac{\lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) - \lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}{\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) + \lambda_{max}(C^{-1/2}AC^{-1/2})}$$

Méthode de Richardon préconditionnée à pas variable pour les matrices et préconditionnements SDP: algorithme

Soient A et C SDP et le système $Ax = b$.

On applique l'algorithme de Richardon à pas variable au système

$$C^{-1/2}AC^{-1/2}y = C^{-1/2}b.$$

Il se formule comme précédemment avec la matrice $\tilde{A} = C^{-1/2}AC^{-1/2}$, le second membre $c = C^{-1/2}b$, les itérés $y^k = C^{1/2}x^k$ et les résidus $\tilde{r}^k = C^{-1/2}r^k$.
En repassant à A , x , r on obtient:

- Choix de la précision ϵ sur le résidu relatif
- Initialisation: $x^1, r^1 = b - Ax^1, nr = nr^0 = \|r^1\|$
- Itérer tant que $\frac{nr}{nr^0} \geq \epsilon$
 - $q^k = C^{-1}r^k$
 - $p^k = Aq^k$
 - $\alpha^k = \frac{(q^k, r^k)}{(p^k, q^k)}$
 - $x^{k+1} = x^k + \alpha^k q^k$
 - $r^{k+1} = r^k - \alpha^k p^k$
 - $nr = \|r^{k+1}\|$

Exemples de préconditionnements

$$A = D - E - F$$

avec D diagonale de A (supposée inversible), $D - E = \text{tril}(A)$, $D - F = \text{triu}(A)$

- Jacobi:

$$C = D$$

- Gauss Seidel

$$C = D - E \text{ ou } C = D - F$$

- SOR (Successive over relaxation) $\omega \in (0, 2)$

$$C = \frac{D}{\omega} - E$$

- SSOR (Symmetric Successive over relaxation) $\omega \in (0, 2)$

$$C = \left(\frac{D}{\omega} - E \right) \left(\frac{D}{\omega} - F \right)$$