Université Paris-Dauphine Année 2007-2008
DUGEAD 1^{er} cycle
UE 13

Contrôle continu n° 1 : 15 novembre 2007

Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ne pas oublier pas de marquer le numéro de votre groupe.

Exercice 1 Soient les fonctions

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad g(x) = \ln(x)\sqrt{1+x}.$$

1. Donner les domaines de définitions de f et g et montrer qu'elles sont chacune de classe C^2 sur leur domaine de définition.
2. Donner les développements limités de f et g à l'ordre 2 au voisinage du point 1.
3. En déduire la limite au point 1 de la fonction suivante

$$h(x) = \frac{2ef(x) - (e^2+1)x + 2}{\sqrt{2}(x-1) - g(x)}.$$

4. Donner l'équation des tangentes aux graphes de f et g au point 1. Préciser la position des tangentes par rapport aux graphes au voisinage du point 1.
5. On suppose que $x > 0$ et dans ce cas $f(x)$ représente le coût total de production d'un bien A en fonction de la quantité produite x (x est exprimé en millier d'unités du bien A).
   Pour tout $x > 0$, déterminer le coût moyen $f_M(x)$ et le coût marginal $f_m(x)$.
6. On se place au niveau de production $x = 1$. Donner une valeur approchée de la variation relative du coût lorsque l'on augmente la production de 2%.
7. Montrer que le coût de production f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.
8. Calculer la fonction réciproque de f. (on pourra poser $X = e^x$).
9. Pour tout $x > e$ calculer l'élasticité de fg au point x : $e_{fg}(x)$.

Exercice 2 Un peu de géométrie.

1. Donner les définitions d'un ensemble borné et d'un ensemble compact.
2. Donner l'équation cartésienne de la droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par les points $A = (2, 5)$ et $B = (2, 10)$.
3. Donner l'équation cartésienne du cercle dans $\mathbb{R}^2$ de centre $O = (5, 8)$ et de rayon $r = 3$.
4. Représenter graphiquement les ensembles suivants, préciser si la frontière est contenue ou non dans l'ensemble. On précisera si ils sont bornés, on demande une démonstration pour chaque cas.
   - $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + 3x - 5y = 9 \text{ ou } x + y \leqslant 2\}$
   - $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$
   - $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < |2x + y - 2|\}$