Université Paris-Dauphine
UFR GEA 1^{er} cycle

Année 2004-2005

Contrôle continu n° 1
mardi 16 novembre 2004

Nom :

Prénom :

Groupe :

Les documents et calculatrices sont interdits.
Vous devez reporter vos nom, prénom et numéro de groupe à l'emplacement prévu à cet effet et rendre l'énoncé avec la copie.
La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. Donner la définition de la concavité pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, non nécessairement $\mathcal{C}^2$.
2. On considère la fonction $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x)$.
   Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur son domaine de définition.
   En déduire que : $\forall x > 0$, $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x) \geqslant \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
3. Étudier les variations de g et en déduire qu'elle admet un minimum global dont on donnera la valeur.
4. Soit y un réel. Déterminer, suivant la valeur de y, le nombre de solutions de l'équation $g(x) - y = 0$.

Exercice 2 Pour tout réel x, on désigne par $|x|$ la valeur absolue de x.
Soit la fonction $f(x) = |x|^x$.

1. Exprimer f à l'aide d'une fonction exponentielle. Déterminer le domaine de définition de f ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Donner $f(0)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer les dérivées f' et f'' et étudier les variations de f.
5. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f en 1. En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abcisse $x = 1$.

Exercice 3 Soit $h(x) = f \circ u(x)$, avec $f(u) = u^2$, $u(x) = \ln(x^3 - 1)$.

1. Exprimer h en fonction de x. Déterminer les domaines de définition de f, u. En déduire le domaine de définition de h et montrer que cette fonction est continue sur son domaine de définition.

2. Quel est le domaine de dérivabilité de h ? Calculer la dérivée h' en utilisant l'invariance de la relation différentielle et étudier les variations de h.
3. On considère à présent que la fonction $h(x)$ pour $x \geqslant 2$ représente le chiffre d'affaire d'une entreprise en fonction du temps de travail x.

   Montrer que la fonction marginale de h est donnée par $h_m(x) = 6\,x^2 \dfrac{\ln(x^3-1)}{x^3-1}$.
4. Déterminer l'élasticité de h.
5. Montrer que h admet une fonction réciproque, donnant le temps de travail en fonction du chiffre d'affaire y, que l'on explicitera et dont on donnera les ensembles de départ et d'arrivée.

Exercice 4 Représenter graphiquement les ensembles suivants et déterminer s'ils sont bornés.
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x + y \leqslant 1\}$;
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2y\}$;
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 2)^2 + y^2 > 4 \text{ et } x - y \leqslant -1\}$.