

Test du 12 janvier 2007

Durée 1h30, les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit f définie par $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

1. Donner le domaine de définition de f et calculer les dérivées partielles premières de f .
2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(0, 0, f(0, 0))$.
3. Donner une valeur approchée de $f(0.1, -0.2)$.
4. Soit $a > 0$. On se place au point $A = (a, a)$. On suppose que les variables x et y augmentent toutes les deux de 5 %. En utilisant un calcul approché, déterminer a pour que f augmente de 10 %.
5. Déterminer la position du plan tangent au graphe au point $(0, 0, f(0, 0))$.
6. Etudier la convexité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 2. Soit g la fonction à deux variables définie par

$$g(x, y) = \frac{\exp(x + y)}{\sqrt{x + y}}.$$

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$. On suppose qu'il est ouvert.
2. Montrer que la fonction g est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_g$.
3. Etudier la convexité de g sur son ensemble de définition.
4. Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction g sur $\mathcal{D}_g$.

Exercice 3. On considère la fonction réelle de deux variables f définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{2x - y^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On suppose que cet ensemble est ouvert. Est-il convexe ?
2. Déterminer et représenter la courbe de niveau C_k pour $k = 1$.
3. Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_f$.
4. Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.
5. Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f au point $(3, 2)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(2.9, 2.2)$. Commenter votre résultat.
6. Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$. Vérifier que

$$D^2f(3, 2) = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 81/2 \end{pmatrix}.$$

7. Ecrire le développement limité d'ordre 2 de f au point $(3, 2)$. En déduire l'équation du plan tangent et la position du graphe de f par rapport au plan tangent au point $(3, 2)$.