

Test du 13 janvier 2009

Durée 1h30, les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

Partie 1. On définit la fonction ϕ par

$$\phi(x) = 2x - \frac{2}{x^2} + \ln x.$$

1. Tracer grossièrement la courbe représentative de ϕ sur son domaine de définition. Montrer que ϕ réalise une bijection sur des intervalles que l'on précisera.
2. Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution sur son domaine de définition que l'on déterminera.
3. Soit la fonction f suivante :

$$f(x, y) = 2(x^2 + (y+1)^4) - \frac{2}{(x^2 + (y+1)^4)^2} + \ln(x^2 + (y+1)^4).$$

Etudier la convexité (ou la concavité) de f sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y + 1 > 0\}$.

Partie 2. La surface $S(x, y)$ d'un container en carton d'un volume 1 m^3 dont la base a pour dimensions x et y est la fonction

$$S(x, y) = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + x \ln x + y \ln y - (x + y) + 2.$$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_S$ de S et montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_S$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de S .
3. En utilisant la partie 1, déterminer les points critiques (x, y) de S tels que $x = y$ et leur nature.
4. Donner une estimation de la variation relative de S lorsque x augmente de 5% et y de 10% à partir du point $(1; 1)$.
5. Écrire la formule de Taylor-Young de S à l'ordre 2 au point $(1; 1)$. En déduire une approximation à l'ordre 2 de la variation absolue de S lorsque x augmente de 0,05 et y de 0,1 à partir du point $(1; 1)$ en supposant que le reste est négligeable.
6. Donner l'équation du plan tangent au graphe de S au point $(1; 1)$ et la position du graphe par rapport au plan tangent.

7. La fonction S est-elle convexe sur son domaine de définition ? concave ? Justifiez votre réponse.
8. Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+$. En déduire que pour tout $x > 0$,

$$x \ln x \geq x - 1,$$

puis que la fonction S est positive sur son domaine de définition. La fonction S est-elle bornée sur son domaine de définition ? Vous devez justifier votre réponse.

Exercice 2. On définit la fonction

$$f(x, y) = x (y^2 + (\ln x)^2).$$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f .
3. Déterminer les points critiques de f et déterminer leur nature.